

J.E.N.457

Sp ISSN 0081-3397

DETONACIONES CONFINADAS CON SIMETRIA ESFERICA Y CILINDRICA

por

Liñán, A.
Lecuona, A.
bajo contrato
entre la J.E.N.
y la Cátedra de Mecánica
de Fluidos de la E.T.S.I.A.

JUNTA DE ENERGIA NUCLEAR

MADRID, 1979

CLASIFICACION INIS Y DESCRIPTORES

A13

FLUID MECHANICS

SHOCK WAVES

EXPLOSIONS

IMPLOSIONS

SPHERICAL CONFIGURATION

CYLINDRICAL CONFIGURATION

COMPRESSION

Toda correspondencia en relación con este trabajo debe dirigirse al Servicio de Documentación Biblioteca y Publicaciones, Junta de Energía Nuclear, Ciudad Universitaria, Madrid-3, ESPAÑA.

Las solicitudes de ejemplares deben dirigirse a este mismo Servicio.

Los descriptores se han seleccionado del Thesaurus del INIS para describir las materias que contiene este informe con vistas a su recuperación. Para más detalles consúltese el informe IAEA-INIS-12 (INIS: Manual de Indización) y IAEA-INIS-13 (INIS: Thesaurus) publicado por el Organismo Internacional de Energía Atómica.

Se autoriza la reproducción de los resúmenes analíticos que aparecen en esta publicación.

Este trabajo se ha recibido para su impresión en Septiembre de 1.979.

N O T A
=====

El presente trabajo corresponde al Informe #3 del equipo ii) Propagación de Ondas de Choque en Medios Ultradensos, del subprograma de la Jen sobre Confinamiento Inercial, Proyecto Laser-Fisión-Fusión, descrito en el Informe Jen-351.

INDICE

	Página
1. NOMENCLATURA	1
2. INTRODUCCION Y ECUACIONES DEL MOVIMIENTO	4
3. ESTUDIO DE LA ONDA DE DETONACION	11
4. CAMPO DETRAS DE LA ONDA DE DETONACION. PRIMERA APROXIMACION	20
5. SEGUNDA APROXIMACION	22
A. Solución detrás de la Onda de Detonación	25
B. Estudio de la Onda de Choque Débil	26
C. Solución entre la Onda de Choque Débil y la Interfase	28
D. Trayectorias	29
6. ESTUDIO DE LA ONDA DE CHOQUE GENERADA EN EL MEDIO INERTE	33
7. CAMPO DETRAS DE LA ONDA DE CHOQUE	38
A. Primera Aproximación	38
B. Segunda Aproximación	39
C. Trayectorias	42
8. CONDICIONES DE CONTACTO EN LA INTERFASE	43
9. ECUACIONES FINALES DE ACOUPLE PARA LA PRIMERA APROXIMACION	44
10. ECUACIONES FINALES DE ACOUPLE PARA LA SEGUNDA APROXIMACION	46
11. CONCLUSIONES Y RESOLUCION PARA ALGUNOS CASOS TIPICOS .	49
12. REFERENCIAS	57

—=ooOoo=—

1.- NOMENCLATURA

Símbolos Latinos

A ,	Definido en (5.33).
a ,	" " (9.9).
B ,	Velocidad de propagación de la onda de choque débil.
B ₁ ,	Definido en (5.49).
C ,	" " (9.7).
c ,	Velocidad del sonido en el medio.
c _k ,	" " " " " " sin perturbar.
D ,	" de propagación de la onda de detonación.
d ₁ ,	Definido en (3.15).
d ₂ ,	" " " .
E ,	" " (5.33).
e ,	Energía interna específica.
F ,	Definido en (5.32).
f ,	" " (2.13) y (2.16).
G ,	" " (6.12).
g ,	" " (4.15).
H ,	" " (6.12).
I ,	" " (5.32).
j ,	Factor geométrico: j=0, caso plano; j=1, cilíndrico; j=2, esférico.
L ,	Definido en (10.1).
M ,	Velocidad de propagación de la onda de choque en el medio ambiente.
m ₁ ,	Definido en (6.6).
n ,	" " (6.16).

P	,	Presión.
P_c	,	Definido en (6.13).
P_1	,	" " (6.6).
Q	,	" " (8.6).
q	,	Energía química liberada en la combustión del detonante.
R	,	Definido en (10.1).
r	,	Coordenada radial.
r_D	,	Radio de la onda de detonación.
r_i	,	" " " interfase.
r_M	,	" " " onda de choque en el medio inerte.
r_{op}	,	" inicial de una partícula genérica.
S	,	Definido en (10.1).
s	,	Entropía específica.
T	,	Definido en (6.16).
t	,	Tiempo.
u	,	Velocidad.
V	,	Definido en (10.5).
X	,	" " (7.45).
x	,	" " (2.10).
Y	,	" " (7.45).
y	,	" " (2.11).
y_p	,	" " (7.40).

Símbolos griegos

α	,	Definido en (7.26).
β	,	" " (7.27).
$\gamma = (\rho/P) [\partial P / \partial \rho]_{s=cte}$		

Δ ,	Definido en (4.11).
δ ,	" " (6.2).
ε ,	" " (2.25).
ζ ,	" " (2.9).
η ,	" " (9.3).
θ ,	" " (2.21).
λ ,	" " (7.25).
μ ,	" " (9.8).
ξ ,	" " (2.8).
ρ ,	Densidad.
ρ_{kd} ,	del medio detonante, sin perturbar.
ρ_{km} ,	" " " inerte, sin perturbar.
τ ,	Tiempo adimensional, definido en (2.26).
τ_p ,	Definido en (5.37).
ϕ ,	" " (2.14) y (2.17).
φ ,	" " (10.6) y (10.7).
ψ ,	" " (2.12) y (2.15).

Subíndices

a ,	Relativo a la superficie de discontinuidad en las derivadas del campo fluido en el medio detonado.
b ,	Relativo a condiciones en la onda de choque débil en el medio detonado.
D ,	Relativo a la onda de detonación.
d ,	" al medio detonado.
H ,	Significa que se diferencia a lo largo de la curva de Hugoniot.

- i , Relativo a la interfase.
- M , " " " onda de choque en el medio inerte.
- m , " " condiciones en el medio inerte alcanzado.
- 0 , " " " iniciales.
- 1 , " " términos de corrección para obtener la segunda aproximación.

Superíndices

- ' , Relativo a la solución al campo fluido entre la onda de choque débil y la interfase.

2.- INTRODUCCION Y ECUACIONES DEL MOVIMIENTO

Este trabajo tiene por finalidad la descripción analítica del campo fluidodinámico creado por una detonación esférica (cilíndrica o plana) iniciada en el exterior de una bola (cilindro o región semiinfinita) cuando está rodeada de una cáscara de material inerte denso que actúa de reflector, ver la figura 2.1.

La conversión de energía química en térmica en el detonante, da lugar a grandes incrementos de presión establecidos por ondas de presión que coalescen formando una onda de choque (Landau, L.D. y Lifshitz, E.M.; 1971). Esta avanza hacia el interior del material incrementando la presión y la temperatura a valores que permiten que la reacción química ocurra en el material inmediatamente después de ser alcanzado por la onda de choque. La onda de choque y la zona de reacción constituyen la on-

da de detonación, cuyo espesor es tan pequeño que puede considerarse como una superficie de discontinuidad que da lugar a incrementos grandes de presión (Courant, R. y Friedrichs, K.O.; 1948), (Landau, L.D. y Lifshitz, E.M.; 1959), (Zel'dovich, Ya. B. y Raizer, Yu.P.; 1967).

La iniciación de la detonación puede realizarse por deposición rápida de energía en la superficie exterior del material detonante; por ejemplo, mediante la detonación con ignición múltiple de una cáscara de material de alta velocidad de detonación.

De este modo se genera una onda de detonación fuerte cuya velocidad decae a la velocidad de Chapman-Jouguet cuando la energía química liberada por la onda se hace comparable a la energía de iniciación (Korobeinikov, V.P.; 1971). Sin embargo, cuando la onda de detonación ha recorrido distancias comparables a su radio inicial, las partículas se aceleran en su movimiento convergente establecido por la onda, debido a ondas de compresión, que alcanzan a la onda de detonación y la refuerzan incrementando su velocidad de propagación. Por otra parte, las altas presiones originadas por la detonación actúan también sobre el material inerte usado de reflector, de manera que éste toma un movimiento radial divergente iniciado por una onda de choque.

La presión en la interfase: medio detonado-medio inerte comprimido es intermedia entre la ambiente y aquella que existe inmediatamente detrás de la detonación.

En el presente trabajo se analizan las primeras etapas del proceso de propagación de una detonación en un medio detonan

te esférico (cilíndrico o plano) y de la onda de choque asociada en un medio inerte, reflector, que limita al detonante. Se supone despreciable la energía liberada para iniciar la detonación en la interfase, de manera que en el instante inicial la onda de detonación avanza con la velocidad de Chapman-Jouguet.

El proceso de propagación y el campo de velocidades, densidades y presiones, se describirá mediante desarrollos válidos para tiempos pequeños comparados con el que tardaría la onda de detonación en alcanzar el centro y análogos a los utilizados por (Liñán, A. y Rodríguez, M.; 1977).

En el primer término de los desarrollos no aparecen los efectos de la convergencia geométrica, tanto la onda de choque como la de detonación viajan con velocidad constante. Tras la onda de detonación aparece una región de expansión y entre ella y la onda de choque una región donde la presión es uniforme y toma un valor intermedio entre el inicial y el valor elevado existente inmediatamente detrás de la onda de detonación.

Existe pues una discontinuidad de contacto en la interfase (discontinuidad sólo en derivadas y temperatura) y una discontinuidad débil (únicamente en derivadas) en una superficie característica de la zona de detonante ya quemada.

El segundo término y posteriores de los desarrollos son debidos a la curvatura del medio, puesta de manifiesto en las ecuaciones a través del número j ($j=2$, simetría esférica; $j=1$, cilíndrica; $j=0$, plana).

Sigue existiendo discontinuidad de contacto en la interfase para todos los términos. Además aparece una discontinui

dad adicional que consiste en una onda de choque inicialmente débil que en primera aproximación coincide con la superficie de discontinuidad débil del medio detonado. Su existencia está justificada por el hecho de que el fluido se expande en exceso tras la onda de detonación, necesitándose una onda de choque que acople las condiciones del fluido a las existentes en la interfase. Dicha superficie separa a la zona de expansión no perturbada en su movimiento por la presencia del reflector, de otra cuyo movimiento se ve restringido por la resistencia que le opone aquél.

Como consecuencia de ello, el movimiento de esta zona perturbada y del medio inerte alcanzado por la onda de choque generada en él, están interrelacionados a través de condiciones de contacto en la interfase común, las cuales pueden resumirse en la continuidad de la velocidad y presión de ambos fluidos a través de ella; también dependerá del estado del fluido justo delante de la onda de choque débil del medio detonado a través de condiciones de salto. Esta onda, débil en los primeros instantes, es reforzada por su convergencia y debilitada por la caída de presión en la interfase, si el efecto neto fuera de refuerzo, aumentaría su velocidad de propagación, pudiendo alcanzar a la onda de detonación. Al reflejarse aumentaría la intensidad de la onda de detonación sobre sus condiciones de propagación libre. Esto sería un método efectivo de obtener compresiones dinámicas fuertes de núcleos, usando detonantes.

El campo fluidodinámico puede describirse con las ecuaciones de Euler (Courant, R. y Friedrichs, K.O.; 1948), (Stanyu-

kovich, K.P.; 1960), pues el número de Reynolds característico del movimiento resulta ser tan alto que hace que los efectos disipativos sean despreciables. Sin embargo, hemos de admitir discontinuidades en la solución, que tienen en cuenta estos efectos.

Para el movimiento unidireccional resultante las ecuaciones son:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial r} + j \frac{\rho u}{r} = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} = 0 \quad (2.2)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial r} \right) s = 0 \quad (2.3)$$

De la ecuación de estado del medio comprimido nos interesa conocer la entropía específica en función de la presión y la densidad:

$$s = s(P, \rho) \quad (2.4)$$

pero podemos poner que

$$\left(\frac{\partial s}{\partial \rho} \right)_P / \left(\frac{\partial s}{\partial P} \right)_\rho = - \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_s = - c^2 = - \frac{P}{\rho} \gamma(P, \rho) \quad (2.5)$$

donde $\gamma(P, \rho)$ significa que γ es una función de la presión y la densidad, con lo que la ecuación de la energía puede escribirse como:

$$\frac{1}{P} \frac{DP}{Dt} - \frac{\gamma(P, \rho)}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = 0 \quad (2.6)$$

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial r} \quad (2.7)$$

La región en la que el fluido está en movimiento está

limitada por ondas de choque o detonación y por ello las condiciones de contorno vienen dadas por las ecuaciones de conservación a través de estas ondas, que en el instante inicial arrancan de la posición inicial de la interfase del material detonante con el material inerte usado como reflector, de donde deducimos las condiciones iniciales necesarias. Las posiciones de estas discontinuidades, en cualquier instante, vienen dadas como parte de la solución.

Con objeto de situar la onda de detonación en una coordenada fija, se define la variable ξ :

$$\xi = \frac{r-r_{oi}}{r_D-r_{oi}} \quad . \quad (2.8)$$

Para el significado de los subíndices consultar la nomenclatura. De esta forma la onda está situada siempre en $\xi=1$. Con el mismo objeto y para el campo fluido en el medio inerte, detrás de la onda de choque generada en él, se define la variable ζ ,

$$\zeta = \frac{r-r_{oi}}{r_M-r_{oi}} \quad . \quad (2.9)$$

En lugar del tiempo utilizaremos una nueva variable adimensional, que para el medio detonado es:

$$x = \frac{r_D-r_{oi}}{r_{oi}} \quad (2.10)$$

y para el medio inerte alcanzado por la onda de choque es:

$$y = \frac{r_M-r_{oi}}{r_{oi}} \quad . \quad (2.11)$$

Estas variables sólo dependen del tiempo y aparecen de modo natural en las ecuaciones.

Como variables adimensionales, utilizaremos las siguientes:

Para el medio detonado; $r_D \leq r \leq r_i$; ver Fig. 2.2:

$$\psi_d(\xi, x) = \rho(r, t) / \rho_{kd} \quad (2.12)$$

$$f_d(\xi, x) = P(r, t) / D^2(t) \rho_{kd}; \quad D(t) = dr_D / dt \quad (2.13)$$

$$\phi_d(\xi, x) = u(r, t) / D(t); \quad u(r, t) = dr / dt \quad (2.14)$$

Para el medio inerte alcanzado; $r_i \leq r \leq r_M$; ver Fig. 2.2:

$$\psi_m(\zeta, y) = \rho(r, t) / \rho_{km} \quad (2.15)$$

$$f_m(\zeta, y) = P(r, t) / M^2(t) \rho_{km}; \quad M(t) = dr_M / dt \quad (2.16)$$

$$\phi_m(\zeta, y) = u(r, t) / M(t); \quad u(r, t) = dr / dt \quad (2.17)$$

En cuanto se introducen estos cambios de variable en las ecuaciones del movimiento, éstas quedan de la forma:

Para el medio detonado:

$$(\phi_d - \xi) \frac{\partial \psi_d}{\partial \xi} + \psi_d \frac{\partial \phi_d}{\partial \xi} + x \frac{\partial \psi_d}{\partial x} = - \frac{j x \phi_d \psi_d}{1 + x \xi} \quad (2.18)$$

$$(\phi_d - \xi) \frac{\partial \phi_d}{\partial \xi} + \frac{1}{\psi_d} \frac{\partial \psi_d}{\partial \xi} + x \frac{\partial \phi_d}{\partial x} = - \theta \phi_d \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned} (\phi_d - \xi) \left[\frac{\partial f_d}{\partial \xi} - \frac{\gamma_d f_d}{\psi_d} \frac{\partial \psi_d}{\partial \xi} \right] + \\ + x \left[\frac{\partial f_d}{\partial x} - \frac{\gamma_d f_d}{\psi_d} \frac{\partial \psi_d}{\partial x} \right] = - 2 \theta f_d \end{aligned} \quad (2.20)$$

siendo:

$$\theta = x \left(\frac{d^2 x}{dt^2} \right) \left(\frac{dx}{dt} \right)^{-2} \quad (2.21)$$

Para el medio inerte alcanzado:

$$(\phi_m - \zeta) \frac{\partial \psi_m}{\partial \zeta} + \psi_m \frac{\partial \phi_m}{\partial \zeta} + y \frac{\partial \psi_m}{\partial y} = - \frac{jy\phi_m\psi_m}{1+y\zeta} \quad (2.22)$$

$$(\phi_m - \zeta) \frac{\partial \phi_m}{\partial \zeta} + \frac{1}{\psi_m} \frac{\partial \psi_m}{\partial \zeta} + y \frac{\partial \phi_m}{\partial y} = -\epsilon \phi_m \quad (2.23)$$

$$(\phi_m - \zeta) \left[\frac{\partial f_m}{\partial \zeta} - \frac{\gamma_m f_m}{\psi_m} \frac{\partial \psi_m}{\partial \zeta} \right] + y \left[\frac{\partial f_m}{\partial y} - \frac{\gamma_m f_m}{\psi_m} \frac{\partial \psi_m}{\partial y} \right] = -2\epsilon f_m \quad (2.24)$$

siendo:

$$\epsilon = y \left(\frac{d^2 y}{dt^2} \right) \left(\frac{dy}{dt} \right)^{-2} \quad (2.25)$$

Para integrar estas ecuaciones se buscarán desarrollos a la solución en potencias de las variables $x, y \ll 1$, quedándonos con los dos primeros términos, lo cual equivale a desarrollos en el tiempo adimensional:

$$\tau = -D_0 t / r_{oi} \ll 1 \quad (2.26)$$

El análisis presentado aquí es igualmente válido para el caso de tener una bola (cilindro o región plana) de material inerte rodeada de detonante, cuando se inicia la detonación en la interfase.

3.- ESTUDIO DE LA ONDA DE DETONACION

Las ecuaciones de conservación a través de una onda de detonación en un medio denso, si expresamos con el subíndice D el estado del fluido justo detrás de la onda de detonación, son:

$$\rho_D (D - u_D) = \rho_{kd} D \quad (3.1)$$

$$P_D = \rho_{kd} D u_D \quad (3.2)$$

$$e_D + \frac{P_D}{\rho_D} + \frac{(u_D - D)^2}{2} = q + \frac{D^2}{2} \quad (3.3)$$

Se ha despreciado en (3.2) la presión inicial del deto

nante frente a la de la parte detonada y en (3.3) la energía térmica inicial frente a la energía química q por unidad de masa, liberada en la combustión. La ecuación de estado del medio tras la onda de detonación, nos proporcionará la ecuación adicional:

$$e_D = e_D(P_D, \rho_D) \quad (3.4)$$

necesaria para determinar todos los estados posibles detrás de la onda de detonación en función del no perturbado, $P=0$, $\rho=\rho_{kd}$. En el plano P , $1/\rho$; estos estados están representados por la curva de Hugoniot HH' , fig. 3.1.

Si la detonación comienza siendo de Chapman-Jouguet, la entropía específica de los gases resultantes está en un mínimo (Courant, R. y Friedrichs, K.O.; 1948). Por lo tanto a lo largo de la curva HH' y en el instante inicial es:

$$\left[ds_D\right]_{H_0}=0 \implies \left[de_D\right]_{H_0} = -\left[P_D d(1/\rho_D)\right]_{H_0} \quad (3.5)$$

De (3.1) y (3.2) obtenemos que:

$$D^2 = \frac{P_D}{\rho_{kd}^2 (1/\rho_{kd} - 1/\rho_D)} \implies 2 \frac{dD}{D} = \frac{dP_D}{P_D} + \frac{D^2 \rho_{kd}^2}{P_D} d(1/\rho_D) \quad (3.6)$$

De (3.1), (3.2) y (3.3) es:

$$de_D = (1/\rho_{kd} - 1/\rho_D) dP_D / 2 - P_D d(1/\rho_D) / 2 \quad (3.7)$$

Como consecuencia de estas tres ecuaciones resulta:

$$\frac{dP_D}{d(1/\rho_D)} = \frac{P_{oD}}{1/\rho_{kd} - 1/\rho_{oD}} = -D_o^2 \rho_{kd}^2 \quad (3.8)$$

Lo cual expresa que el punto representativo del estado del fluiu

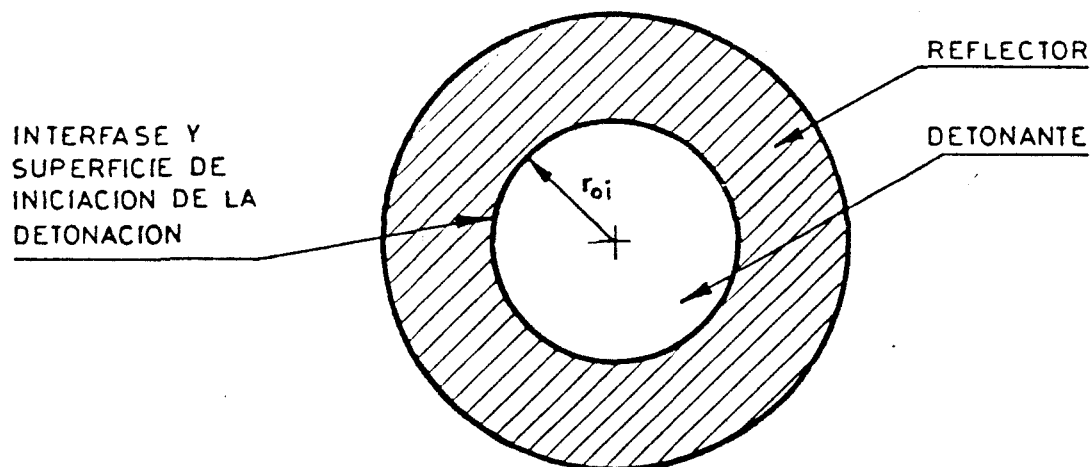


Fig 2.1.- Configuración inicial.

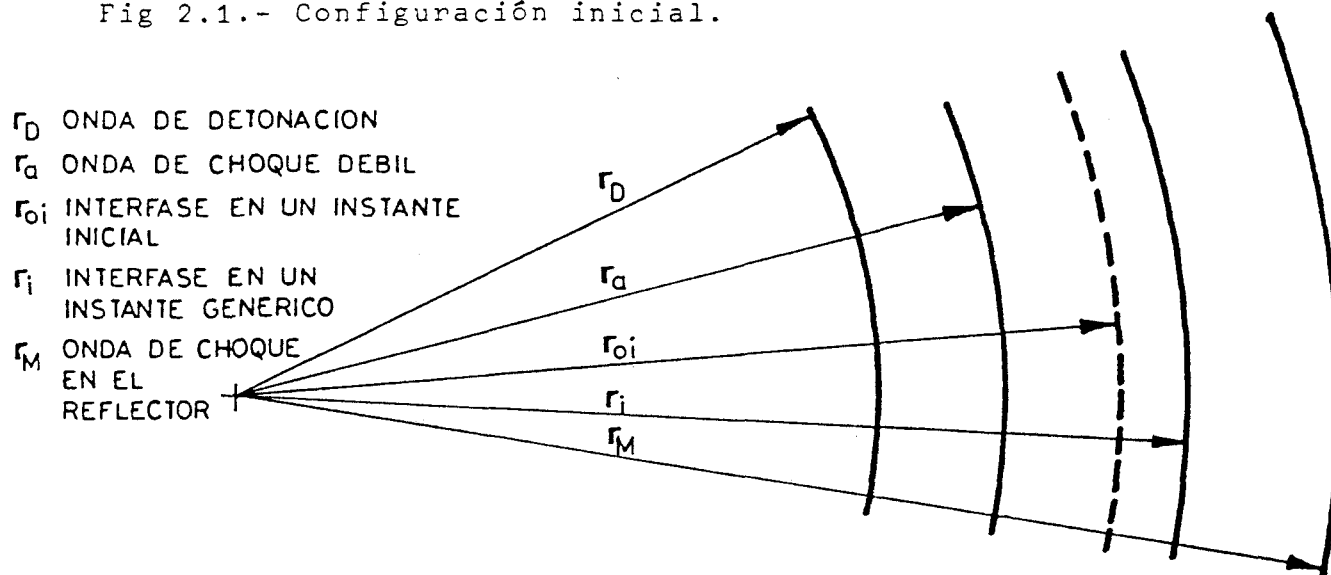


Fig 2.2.- Situación gnérica de las superficies de discontinuidad para $t > 0$.

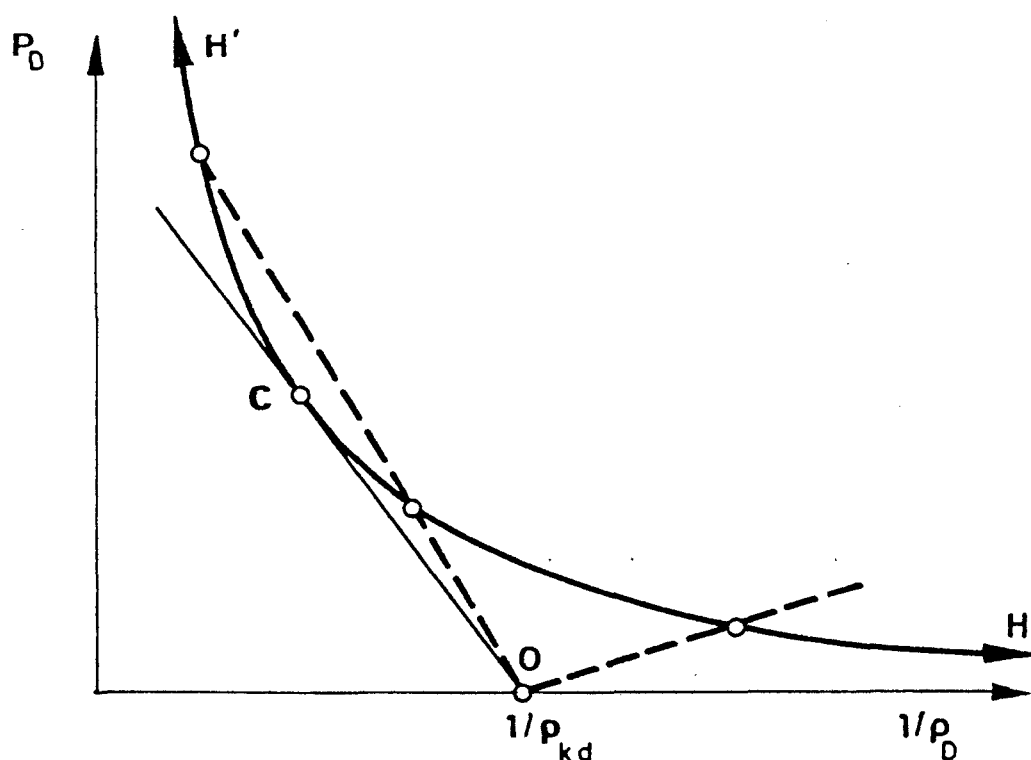


Fig 3.1.- Estados posibles detrás de una onda de detonación para un estado no perturbado dado (Curva de Hugoniot).

do detrás de una detonación de Chapman-Jouguet es el punto C, fig. 3.1, punto de contacto de la curva de Hugoniot con la recta tangente a ella desde el estado no perturbado o y también que la velocidad de detonación, proporcional a la pendiente de la recta \overline{OC} , está en un mínimo (hipótesis de Chapman-Jouguet).

Puesto que la curva de Hugoniot equivale a una isentrópica cerca del punto de Chapman-Jouguet, de (3.8) se deduce que:

$$C_{OD}^2 = \rho_{kd}^2 D_o^2 / \rho_{OD}^2, \quad (3.9)$$

luego de (3.1) se deduce que, con la definición de γ de (1.5) que:

$$D_o - u_{OD} = C_{OD} = \sqrt{\gamma_{OD} P_{OD} / \rho_{OD}}. \quad (3.10)$$

Es decir que la velocidad de la onda de detonación con respecto a los gases inmediatamente detrás de ella es igual a la velocidad local del sonido.

A una perturbación sobre el estado detrás de la onda, dP_D , $d(1/\rho_D)$; de (3.7) y (3.8) podemos deducir que:

$$dD^2 \Big|_{Ho} = 0. \quad (3.11)$$

Si calculamos la diferencial segunda de la velocidad de detonación:

$$\begin{aligned} \left[d^2 D^2 \right]_{Ho} = & \left[\frac{\partial^2 D^2}{\{\partial(1/\rho_D)\}^2} \right]_o \{d(1/\rho_D)\}^2 + \left[\frac{\partial^2 D^2}{(\partial P_D)^2} \right]_o (dP_D)^2 + \\ & + 2 \left[\frac{\partial^2 D^2}{\partial P_D \partial 1/\rho_D} \right]_o dP_D d(1/\rho_D) \end{aligned} \quad (3.12)$$

que teniendo en cuenta (3.6) y (3.8) se reduce a:

$$\left[d^2 D^2 \right]_{H_0} = 4 D_0^2 (dP_D)^2 / P_{0D}^2 . \quad (3.13)$$

Cuando la separación de la onda de detonación con respecto a la interfase es pequeña comparada con su radio, la variable adimensional x es mucho menor que la unidad y podemos utilizarla como variable independiente en un desarrollo de las variables fluidas adimensionales, pues aparece de modo natural en las ecuaciones. Sin embargo, por claridad, usaremos el tiempo adimensional:

$$\tau = -D_0 t / r_{0i} ; D_0 < 0 \text{ para onda de detonación implosiva} \quad (3.14)$$

Un desarrollo de D en potencias de τ , quedándonos con los tres primeros términos, sería:

$$D = D_0 (1 - d_1 \tau - d_2 \tau^2) , \quad (3.15)$$

pero de acuerdo con (3.11) es $d_1 = 0$. Puesto que:

$$D = dr_D / dt = -D_0 dx / d\tau , \quad (3.16)$$

la relación entre τ y x es:

$$x = -\tau + O(\tau^3) , \quad (3.17)$$

donde $O(\tau^3)$ expresa un infinitésimo del orden de τ^3 .

El estado tras la onda de detonación, en variables adimensionales, podemos ponerlo como:

$$f_D(\tau) = f_{0D} - f_{1D} \tau + \dots \quad (3.18)$$

$$\phi_D(\tau) = \phi_{0D} - \phi_{1D} \tau + \dots \quad (3.19)$$

$$\psi_D(\tau) = \psi_{0D} - \psi_{1D} \tau + \dots \quad (3.20)$$

Introduciendo esto en las ecuaciones de conservación a través de la onda de detonación (3.1), (3.2) y (3.3) y añadien

do la condición (3.10), que se puede escribir como:

$$1 - \phi_{oD} = \sqrt{\gamma_{oD} f_{oD} / \psi_{oD}} \quad \gamma_{oD} = \gamma_d(P_{oD}, \rho_{oD}) \quad (3.21)$$

Identificando los términos independientes de τ , obtenemos que:

$$f_{oD} = \phi_{oD} = 1/(\gamma_{oD} + 1) \quad (3.22)$$

$$\psi_{oD} = (\gamma_{oD} + 1)/\gamma_{oD} \quad (3.23)$$

$$(e_{oD} - q)/D_o^2 = \frac{1}{2(\gamma_{oD} + 1)^2} \quad (3.24)$$

Cuando pueda describirse la evolución del fluido tras la onda de detonación por medio de la ecuación de estado

$$P_d/\rho_d^{\gamma_d} = K(s_d), \quad \gamma_d = \text{cte} = \gamma_{oD} \quad (3.25)$$

se obtiene:

$$e_d = \frac{1}{\gamma_d - 1} \frac{P_d}{\rho_d} \quad (3.26)$$

que introducida en (3.24) nos da

$$D_o = -\sqrt{2(\gamma_d^2 - 1)q} \quad (3.27)$$

$$P_{oD} = \frac{D_o^2 \rho_{kd}}{\gamma_d + 1} \quad (3.28)$$

Si tomásemos como ecuación de estado:

$$P_d/\rho_d^{\gamma_d} = K_o, \quad (3.29)$$

la expresión de la energía interna es:

$$e_d = \frac{1}{\gamma_d - 1} \frac{P_d}{\rho_d} - F(s_d) \quad (3.30)$$

Tan solo la energía interna depende de la entropía. P y ρ resul

tan independientes del estado térmico del fluido.

Podemos introducir (3.29) directamente en (3.22) y (3.23) y obtener D_o , quedando:

$$D_o = - \{ (\gamma_d + 1)^{\gamma_d + 1} K_o \rho_{kd}^{\gamma_d - 1} / \gamma_d^{\gamma_d} \}^{1/2} \quad (3.31)$$

De la ecuación de la energía (3.3) resulta que:

$$F(s_d) = \frac{D^2}{2(\gamma_d + 1)^2} + q - \frac{1}{\gamma_d - 1} \frac{P_d}{\rho_d} \geq 0 \quad (3.32)$$

de donde podemos deducir que para que el régimen sea posible, ha de ser:

$$q \geq (\gamma_d + 1)^2 K_o \rho_{kd}^2 / \gamma_d^3 \quad (3.33)$$

Se observa que con la ecuación de estado (3.25), D_o depende exclusivamente de q , mientras que con (3.29) depende de ρ_{kd} y no depende de q . Se trata de dos casos extremos de ecuación de estado pues D_o depende tanto de q como de ρ_{kd} .

Si en (3.31) sustituimos $K_o = P_{oD} / \rho_{oD}^{\gamma_d}$ obtenemos (3.28). Por lo tanto podemos usar (3.28) para determinar, conociendo P_{oD} y D_o experimentalmente, el valor de γ_d adecuado de acuerdo con estas ecuaciones de estado.

En la Tabla 3.1 se relacionan las características del fluido en el punto de Chapman-Jouguet de algunos detonantes sólidos, líquidos y gaseosos típicos, obtenida de (Jaumotte, A.L.; 1971). Se indican en ella también el valor de γ_d obtenido usando (3.28).

Para el estudio que sigue no es necesaria la discriminación entre estos dos tipos de ecuación de estado, pues ambas

TIPO DE DETONANTE	ρ_{kd} (g/cm ³)	T_{OD} (K)	P_{OD} (Kb)	$ D_o $ (m/s)
Trinitrato de glicerol; $\gamma_d \approx 3'6$	1'60	5640	199	7500
Dinamita; $\gamma_d \approx 3'9$ (75%+Kieselguhr)	1'55	5520	139	6590
TNT; $\gamma_d \approx 5'5$	1'5	3870	110	6800
TNT (21%)+NH ₄ NO ₃ (79%)		3620	49	4500
TNT(21%)+NH ₄ NO ₃ (68%)+NaCl		3100	44	4300
Nitroglicerina				7650
Pentrita				7980
Exógeno				8759
Metano+Oxígeno (esteoquim.) 20 °C, 1 atm.	0'799 ·10 ⁻³			2320
Etileno+Oxígeno (C ₂ H ₄ +3'5 O ₂) 20 °C, 1 atm.	1'29 ·10 ⁻³			2363
Hidrógeno+Oxígeno (esteoquim.) 22 °C, 1 atm.	0'498 ·10 ⁻³	3686	18'9 ·10 ⁻³	2848

Tabla 3.1.- Características de la detonación de Chapman-Jouguet para varios detonantes.

dan lugar a isentrópicas del tipo: $P_d/\rho_d^{\gamma_d}=K$, siendo en nuestra aproximación el campo fluido homoentrópico.

Identificando los términos asociados a τ en las ecuaciones de conservación se obtiene que:

$$f_{1d} = \phi_{1d} \quad (3.34)$$

$$\psi_{1D} = \phi_{1D}(\gamma_d+1)^2/\gamma_d^2 \quad (3.35)$$

La ecuación de la energía resulta una identidad. La ecuación necesaria para completar a (3.34) y (3.35) ha de venir de particularizar la solución de las ecuaciones del movimiento fluido detrás de la onda de detonación, pues es fácil suponer que puesto que la onda de detonación avanza con respecto al fluido que deja detrás con la velocidad del sonido local, la única perturbación sobre ella, ha de ser transversal, es decir, debida únicamente a la convergencia del medio.

Tan sólo una onda de choque generada en el campo fluido podría alcanzarle y acelerarla, llevándole información de la existencia del reflector.

Para calcular el coeficiente d_2 de (3.15), con ayuda de (3.13) y (3.18) es:

$$\left[d^2 D^2 \right]_{Ho} = -4 D_o^2 d_2 (d\tau)^2 = -4 D_o^2 (dP_D/P_{oD})^2 \quad (3.36)$$

$$dP_D = -\rho_{kd} D_o^2 \phi_{1D} d\tau \quad (3.37)$$

luego resulta que:

$$D = D_o \{1 + (\phi_{1D}/\phi_{oD})^2 \tau^2 / 2\} \quad (3.38)$$

4.- CAMPO DETRAS DE LA ONDA DE DETONACION. PRIMERA APROXIMACION

Proponiendo una solución al campo fluido como desarrollo en serie de potencias del tiempo adimensional $\tau \ll 1$:

$$f_d(\tau, \xi) = f_{od}(\xi) - \tau f_{1d}(\xi) + \dots \quad (4.1)$$

$$\phi_d(\tau, \xi) = \phi_{od}(\xi) - \tau \phi_{1d}(\xi) + \dots \quad (4.2)$$

$$\psi_d(\tau, \xi) = \psi_{od}(\xi) - \tau \psi_{1d}(\xi) + \dots \quad (4.3)$$

Las ecuaciones para la primera aproximación (Liñán, A. y Rodríguez, M.; 1977) son:

$$(\phi_{od} - \xi) \frac{d\psi_{od}}{d\xi} + \psi_{od} \frac{d\phi_{od}}{d\xi} = 0 \quad (4.4)$$

$$(\phi_{od} - \xi) \frac{d\phi_{od}}{d\xi} + \frac{1}{\psi_{od}} \frac{df_{od}}{d\xi} = 0 \quad (4.5)$$

$$(\phi_{od} - \xi) \frac{d}{d\xi} \left(\frac{f_{od}}{\psi_{od}} \right) = 0 \quad (4.6)$$

$$\gamma_d = \gamma_d(f_d, \psi_d) \quad (4.7)$$

Condiciones de contorno:

en $\xi=1$ (onda de detonación)

$$\phi_{od} = f_{od} = 1/(\gamma_d + 1) \quad (4.8)$$

$$\psi_{od} = (\gamma_d + 1)/\gamma_d \quad (4.9)$$

en $\xi=\xi_i$ (interfase)

$$\phi_{od} = \phi_{oid} \quad (4.10)$$

Para poder integrar el sistema de ecuaciones ha de suponerse γ_d constante e igual a su valor tras la onda de detonación $\gamma_d = \gamma_{od}$. La solución depende del valor del determinante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \phi_{od}-\xi & \psi_{od} \\ \gamma_d f_{od}/\psi_{od}^2 & \phi_{od}-\xi \end{vmatrix} . \quad (4.11)$$

Para $\Delta \neq 0$, la solución representa una expansión y se cumplen las condiciones de contorno detrás de la onda de detonación (4.8) y (4.9), pero no (4.10), quedando:

$$\phi_{od} = \frac{1}{\gamma_d - 1} \left(\frac{2\gamma_d}{\gamma_d + 1} g - 1 \right) \quad (4.12)$$

$$\psi_{od} = \frac{\gamma_d + 1}{\gamma_d} g^{2/(\gamma_d - 1)} \quad (4.13)$$

$$f_{od} = \frac{1}{\gamma_d + 1} g^{2\gamma_d/(\gamma_d - 1)} \quad (4.14)$$

en donde:

$$g = \frac{1 + (\gamma_d - 1)\xi}{\gamma_d} \quad (4.15)$$

Esta solución es válida hasta que $\phi_{od} = \phi_{oid}$, en $\xi = \xi_{oa}$ en que la solución que hace $\Delta = 0$ es la correcta entre este punto y la interfase. Por lo tanto en $\xi = \xi_{oa}$ (en primera aproximación) existe una discontinuidad en las derivadas, su posición viene dada por:

$$\phi_{oid} = \frac{1}{\gamma_d - 1} \left(\frac{2\gamma_d}{\gamma_d + 1} g_{oa} - 1 \right) \Rightarrow g_{oa} = \frac{\gamma_d + 1}{2\gamma_d} \left[1 + (\gamma_d - 1)\phi_{oid} \right] \quad (4.16)$$

$$\xi_{oa} = [1 + (\gamma_d + 1)\phi_{oid}] / 2 \quad (4.17)$$

La solución desde $g = g_a$ hasta la interfase $g = g_i$, donde se cumple la condición de contorno (4.10), tiene derivadas nulas y es:

$$\phi_{od} = \phi_{oid} \quad (4.18)$$

$$\psi'_{od} = \psi_{oid} = \left(\frac{\gamma_d + 1}{\gamma_d} \right)^{2/(\gamma_d - 1)} g_{oa} \quad (4.19)$$

$$f'_{od} = f_{oid} = \left(\frac{1}{\gamma_d + 1} \right)^{2\gamma_d/(\gamma_d - 1)} g_{oa} \quad (4.20)$$

El valor de ϕ_{oid} se determinará al imponer las condiciones de contacto en la interfase.

Un diagrama cualitativo del campo de velocidades, densidades y presiones en su primera aproximación, viene dado en la fig. 4.1.

5.- SEGUNDA APROXIMACION

En este apartado se suprime en la escritura el subíndice d correspondiente a las condiciones en el medio detonado por sencillez.

Las ecuaciones correspondientes a los términos asociados a τ (Liñán, A. y Rodríguez, M.; 1977) son:

$$(\phi_o - \xi) \frac{d\psi_1}{d\xi} + \psi_o \frac{d\phi_1}{d\xi} + \phi_1 \frac{d\psi_o}{d\xi} + \left(1 + \frac{d\phi_o}{d\xi}\right) \psi_1 = -j \phi_o \psi_o \quad (5.1)$$

$$(\phi_o - \xi) \frac{d\phi_1}{d\xi} + \frac{1}{\psi_o} \frac{df_1}{d\xi} - \frac{\psi_1}{\psi_o} \frac{df_o}{d\xi} + \left(1 + \frac{d\phi_o}{d\xi}\right) \phi_1 = 0 \quad (5.2)$$

$$(\phi_o - \xi) \frac{d}{d\xi} \left(\frac{f_1}{f_o} - \gamma \frac{\psi_1}{\psi_o} \right) + \frac{f_1}{f_o} - \gamma \frac{\psi_1}{\psi_o} = 0 \quad (5.3)$$

Condiciones de contorno:

en $\xi=1$ (onda de detonación)

$$f_1 = \phi_{1D} \quad (5.4)$$

$$\psi_1 = \phi_{1D} / (1 - \phi_{oD}) \quad (5.5)$$

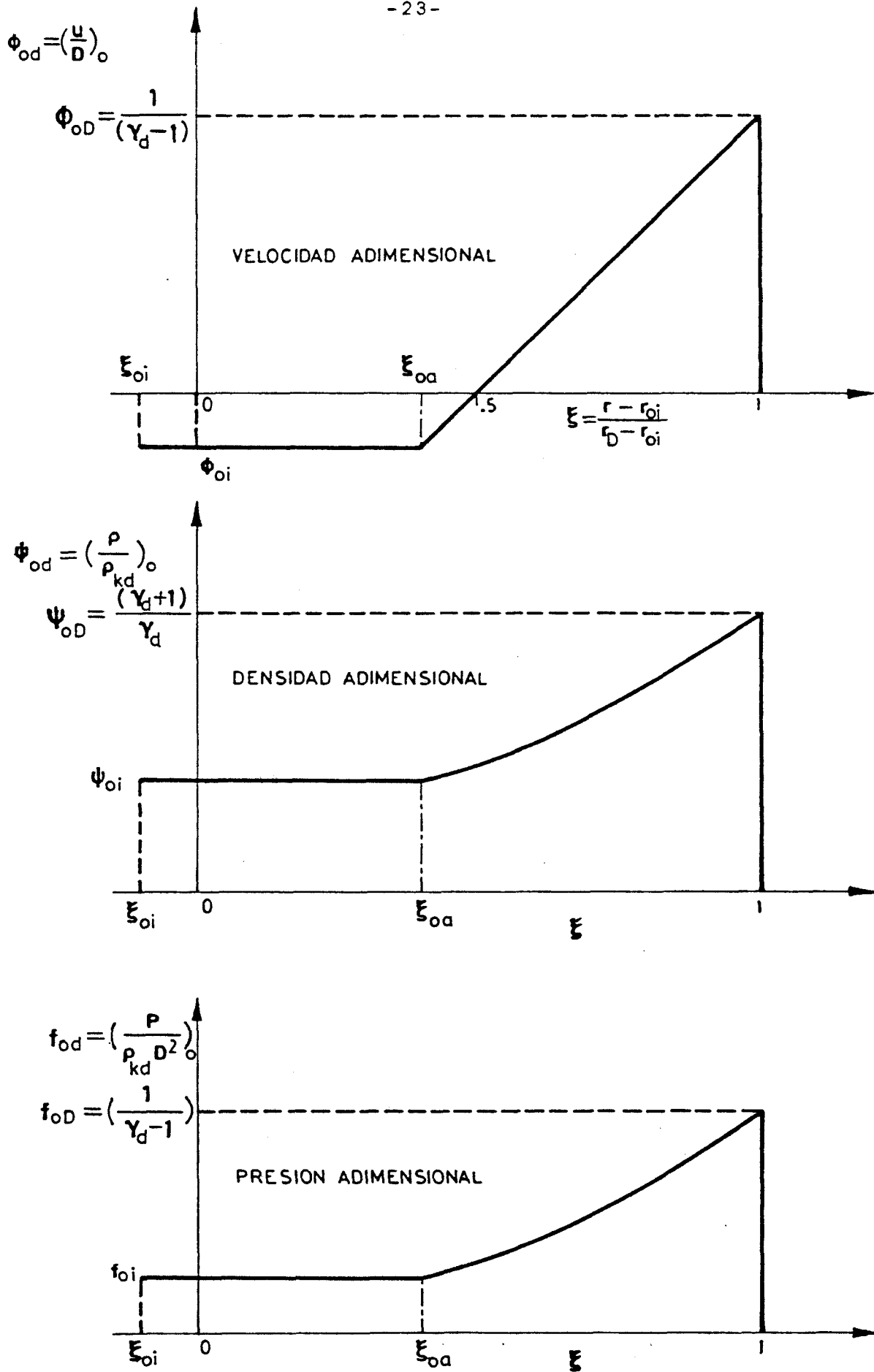


Fig 4.1.- Diagrama cualitativo de la primera aproximación al campo fluido en el medio detonado.

en $\xi = \xi_i$ (interfase)

$$\phi_1 = \phi_{1i} \left(1 + \left[\frac{\partial \phi'_o}{\partial \xi} \right]_{\xi=\phi_{oi}} \right) = \phi_{1i} \quad (5.6)$$

$$f_1 = f_{1i} + \left[\frac{\partial f'_o}{\partial \xi} \right]_{\xi=\phi_{oi}} \phi_{1i} = f_{1i} \quad (5.7)$$

Análogamente a lo ocurrido a la solución al primer término de los desarrollos, resulta imposible hacer cumplir a la misma solución todas estas condiciones de contorno a la vez.

Debido al cambio de carácter de la primera aproximación a la solución, éste se presenta también para la segunda y debido a que las ecuaciones del movimiento ahora no son homogéneas no es posible la solución de derivadas nulas que permita el cumplimiento de todas las condiciones de contorno sin discontinuidades en ϕ_1 , ψ_1 , f_1 .

Las ecuaciones de Euler, utilizadas para describir el movimiento, permiten la existencia de discontinuidades en su solución, al no aparecer en ellas los términos disipativos; luego para hacer posible el cumplimiento de todas las condiciones de contorno, la única posibilidad es que el campo fluido presente la discontinuidad creada por una onda de choque débil, con salto solamente de orden τ en las magnitudes fluidas (ϕ, f, ψ) , lo que representa un salto de orden unidad en (ϕ_1, f_1, ψ_1) y viajando en primera aproximación a la velocidad local del sonido.

Como primer paso se harán cumplir las condiciones de contorno en la onda de detonación, a la solución proporcionada por las ecuaciones para la segunda aproximación habiendo introducido en ellas la primera aproximación válida justo detrás de

la onda de detonación. Esta solución es válida hasta la onda de choque, o hasta el punto en que cambia de carácter la solución para la primera aproximación, por lo que la onda de choque ha de situarse con el cumplimiento de la condición de contorno restante y una vez conocidas las soluciones a ambos lados de ella.

A.- Solución Detrás de la Onda de Detonación

Entrando con la solución a la primera aproximación da da por (4.12) a (4.14) y con las condiciones de contorno (5.4) y (5.5), en (5.3) se llega a que:

$$f_1/f_0 = \gamma \psi_1/\psi_0 \quad (5.8)$$

Entrando con esta expresión en (5.2) y en combinación lineal con (5.1) se obtiene la relación algébrica:

$$\psi_1 = -\left(\frac{\gamma+1}{\gamma}\right)^2 \frac{\gamma+5}{3\gamma-1} \phi_1 g^{(3-\gamma)/(\gamma-1)} + j \left[\frac{\gamma(2g-1)-1}{\gamma(\gamma+1)} \right] \frac{\gamma+1}{3\gamma-1} g^{2/(\gamma-1)} \quad (5.9)$$

Particularizando esta expresión para $g=1$ (onda de detonación), y junto con las condiciones de contorno (5.4) y (5.5) se obtiene:

$$\phi_{1D} = f_{1D} = -j\gamma/\{4(\gamma+1)^2\}, \quad \psi_{1D} = -j/(4\gamma) \quad (5.10)$$

Integrando la ecuación diferencial (5.1), teniendo en cuenta (5.8) y (5.9) se obtiene la solución completa:

$$\phi_1 = -\frac{j}{(\gamma+1)^2} \left[\frac{g^{(\gamma+1)/\{2(\gamma-1)\}}}{4} + \frac{g}{3-\gamma} \left[1 - g^{(3-\gamma)/\{2(\gamma-1)\}} \right] - \frac{3\gamma g^2}{5-3\gamma} \left[1 - g^{(5-3\gamma)/\{2(\gamma-1)\}} \right] \right] \quad (5.11)$$

$$\psi_1 = \frac{j}{\gamma(3\gamma-1)} \left[\left[\frac{\gamma+5}{3-\gamma} + \frac{(\gamma+1)^2}{\gamma-1} \right] g^{2/(\gamma-1)} + \gamma \left[\frac{3(\gamma+5)}{3\gamma-5} - \frac{2(\gamma+1)}{\gamma-1} \right] g^{(\gamma+1)/(\gamma-1)} - (\gamma+5) \left[\frac{3\gamma}{3\gamma-5} + \frac{1}{3-\gamma} - \frac{1}{4} \right] g^{(7-\gamma)/\{2(\gamma-1)\}} \right] \quad (5.12)$$

$$f_1 = \{\gamma g/(\gamma+1)\}^2 \psi_1 \quad (5.13)$$

Para $\gamma=3$ esta solución no es válida, sino la siguiente:

$$g = (1+2\xi)/3 \quad (5.14)$$

$$\phi_1 = 3jg(4 \ln g + 8 - 9g)/4^3 \quad (5.15)$$

$$\psi_1 = jg(\frac{3}{4} - g - \ln g)/3 \quad (5.17)$$

$$f_1 = (3g/4)^2 \psi_1 \quad (5.17)$$

B.- Estudio de la Onda de Choque Débil

Como el salto de las magnitudes fluidas es en ϕ_1 , f_1 , ψ_1 ; las ecuaciones de conservación a través de la onda de choque débil, indicando con prima (') las magnitudes referentes al estado del fluido detrás de ella, quedan:

$$\left[\frac{\psi'_1 - \psi_1}{\psi_o} - \frac{\phi'_1 - \phi_1}{\phi_{or}} \right]_b = 0 \quad (5.18)$$

$$\left[\frac{f'_1 - f_1}{\phi_{or}^2 \psi_o} - 2 \frac{\phi'_1 - \phi_1}{\phi_{or}} + \frac{\psi'_1 - \psi_1}{\psi_o} \right]_b = 0 \quad (5.19)$$

$$\left[\frac{f'_1 - f_1}{f_o} - \gamma \frac{\psi'_1 - \psi_1}{\psi_o} \right]_b = 0 \quad (5.20)$$

El subíndice b, denotando la posición de la onda y siendo:

$$\phi_{or} = (B_o - u_{ob})/D_o \quad (5.21)$$

B_o es la velocidad inicial de propagación de la onda de choque.

Este sistema de ecuaciones tiene solución distinta de cero cuando:

$$\phi_{or} = \sqrt{\gamma \frac{f_o}{\psi_o}} = \frac{c_{ob}}{B_o} = [1 + (\gamma - 1)\phi_{oi}] / 2 \quad (5.22)$$

luego:

$$B_o / D_o = [1 + (\gamma + 1)\phi_{oi}] / 2 \quad (5.23)$$

Ahora bien, de la definición de las variables adimensionales se deduce que:

$$[d(x\xi_a)/dx] = \phi_a = \phi_{oa} - \tau\phi_{1a} \quad (5.24)$$

luego

$$\phi_a = \xi_{oa} + O(\tau) \quad (5.25)$$

es decir:

$$\xi_{oa} = [1 + (\gamma + 1)\phi_{oid}] / 2 \quad (5.26)$$

De (5.23), (5.24) y (5.26) se puede deducir que $\xi_{ob} = \xi_{oa}$. La onda de choque se encuentra en primera aproximación, precisamente en el punto de cambio de carácter de la solución al primer término de los desarrollos, salvo términos de orden τ .

Se usarán (5.18) y (5.20) como condiciones de contorno al integrar las ecuaciones que rigen el campo fluido en la zona entre la onda de choque débil y la interfase.

Resulta necesario calcular el segundo término de la velocidad de propagación de esta onda, el cual tiene en cuenta el efecto de convergencia, para poder imponer exactamente la condición de salto (5.18). Además si esta onda se acelerase, al encontrarse con presiones crecientes progresaría en su aceleración pudiendo alcanzar a la onda de detonación.

Para ondas de choque débiles, el segundo término de la

expresión de la velocidad de propagación de ondas de choque débiles, coincide con la media de las velocidades de las superficies características de delante y detrás de ella (Witham, G.B.; 1974), luego:

$$B = B_o - \tau B_1 = (\phi_r + \phi_b + \phi'_r + \phi'_b) D/2 \quad (5.27)$$

$$\begin{aligned} B_1/D_o &= (\phi_{1r} + \phi'_{1r} + \phi_{1b} + \phi'_{1b})/2 = \\ &= (c_{1b}/D_o + c'_{1b}/D_o + \phi_{1b} + \phi'_{1b})/2 = \left[\frac{\phi_{or}(\gamma-1)}{2\psi_{oi}} (\psi'_1 + \psi_1) + \phi_1 + \phi'_1 \right]_b /2 = \\ &= \left[\left(\frac{\gamma}{\gamma+1} \right)^2 \frac{\gamma-1}{2} g_{oa} \left(\frac{\gamma-3}{\gamma-1} \right) (\psi_1 + \psi'_1) + \phi_1 + \phi'_1 \right]_b /2 \end{aligned} \quad (5.28)$$

C.- Solución Entre la Onda de Choque Débil y la Interfase

Entrando con la solución para la primera aproximación al campo fluido en esta zona (4.18), (4.19) y (4.20) en las ecuaciones del movimiento (5.1), (5.2) y (5.3) y con las condiciones de contorno (5.18) y (5.20) y teniendo en cuenta (5.8), se llega al sistema de ecuaciones:

$$(\phi_{oi} - \xi) \frac{d\psi'_1}{d\xi} + \psi_{oi} \frac{d\phi'_1}{d\xi} + \psi'_1 = -j \phi_{oi} \psi_{oi} \quad (5.29)$$

$$(\phi_{oi} - \xi) \frac{d\phi'_1}{d\xi} + \frac{1}{\psi_{oi}} \frac{df'_1}{d\xi} + \phi'_1 = 0 \quad (5.30)$$

$$f'_1/f_{oi} = \gamma \psi'_1/\psi_{oi} \quad (5.31)$$

Estas ecuaciones admiten solución de la forma:

$$\phi'_1 = Fg + (\gamma-1)I/\gamma \quad (5.32)$$

$$\psi'_1 = Ag + (\gamma-1)E/\gamma \quad (5.33)$$

si se cumple que:

$$\{(\gamma-1)^{-1} + \phi_{oi}\} A + \psi_{oi} F + E = -j \phi_{oi} \psi_{oi} \gamma / (\gamma-1) \quad (5.34)$$

$$\gamma f_{oi} A / \psi_{oi}^2 + \{(\gamma-1)^{-1} + \phi_{oi}\} F + I = 0 \quad (5.35)$$

además de la condición de contorno (5.18), y siendo:

$$f'_1 = \gamma f_{oi} \{A\gamma + (\gamma-1)E/\gamma\} / \psi_{oi} \quad (5.36)$$

(5.34), (5.35) y (5.36) se emplearán en completar, junto con las condiciones de contacto en la interfase, el cuadro de ecuaciones necesarias para determinar todos los parámetros que intervienen en la solución.

En la fig. 5.1 se muestra un diagrama cualitativo del perfil de velocidades, presiones y densidades adimensionales en el medio detonado.

D.- Trayectorias

Para que el punto considerado, inicialmente en $r=r_{op}$, sea alcanzado por la onda de detonación, habrá que esperar un tiempo t_p :

$$-D_o t_p / r_{oi} = 1 - r_{op} / r_{oi} = \tau_p \quad (5.37)$$

A partir de este instante la ecuación cinemática del movimiento del punto es:

$$d[x\xi_p(x)] = \phi_d[\xi_p(x), x] dx \quad (5.38)$$

que es equivalente a:

$$\frac{d\xi_p(x)}{\phi_d[\xi_p(x), x] - \xi_p(x)} = dx/x \quad (5.39)$$

Introduciendo en esta ecuación $\phi_d[\xi_p(x), x]$ e integrán

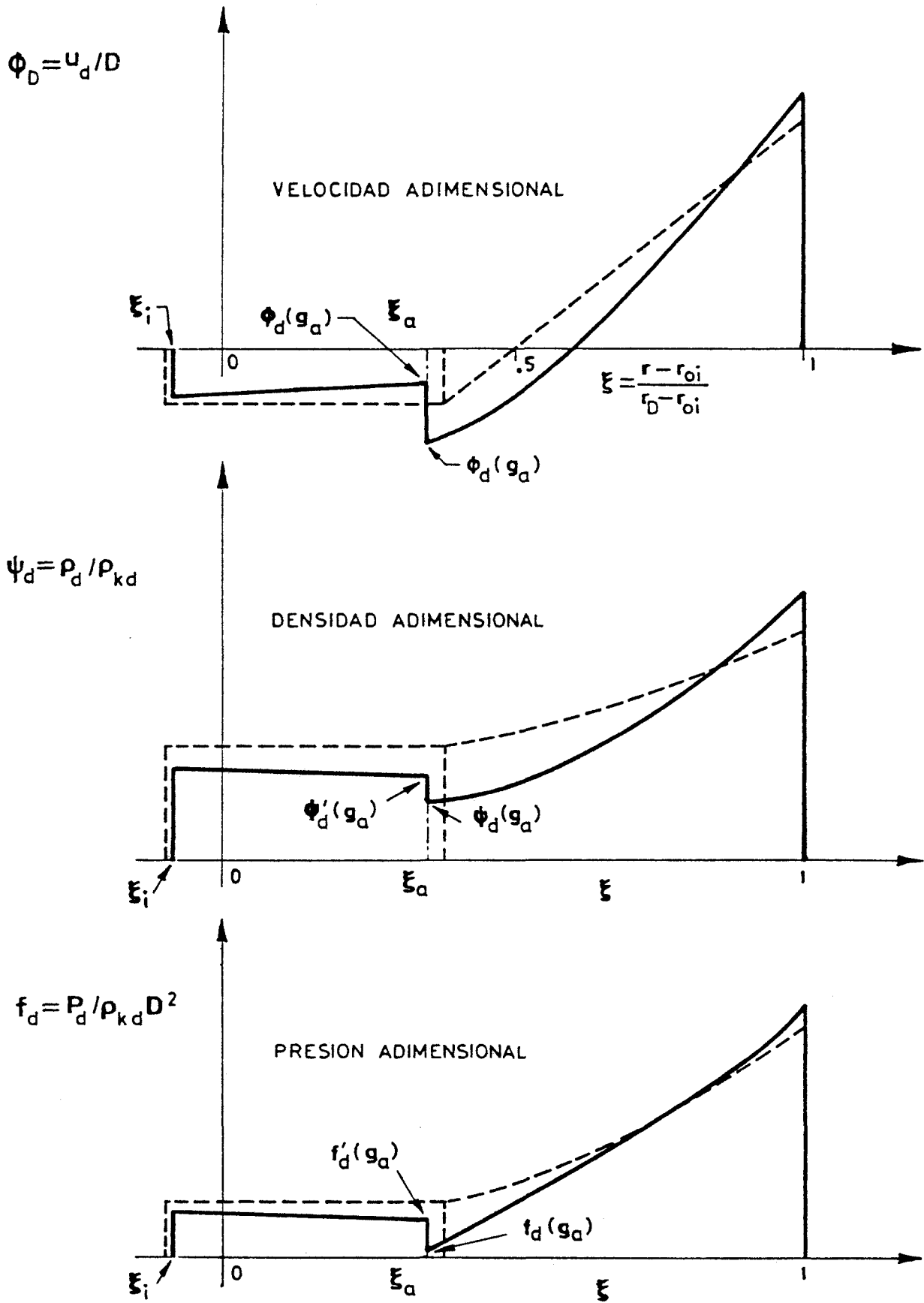


Fig 5.1.- Diagrama cualitativo de la primera aproximación (-----) y de la segunda (—) al campo fluido en el medio detonado.

dola a partir del instante de alcance del punto por la onda de detonación $\tau_p = -x_p$, $\xi_p = 1$; se obtiene $\xi_p(x) = \xi_p(-\tau)$ que nos proporciona la posición relativa del punto a la onda. Según (4.12) es, en primera aproximación:

$$\phi[\xi_p(x), x] = \phi_0[\xi_p(x)] = [2\xi(x) - 1]/(\gamma + 1) \quad (5.40)$$

No nos permite una mejor aproximación la integración de (5.39). Por lo tanto queda:

$$\xi(\tau) = [(\gamma \tau_p / \tau)^{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} - 1]/(\gamma - 1) \quad (5.41)$$

Esta ecuación es válida hasta que la partícula fluida es alcanzada por la discontinuidad en las derivadas, en $\xi(\tau) = \xi_b$, en que (5.39) ha de ser integrada con la condición inicial:

$$\tau_b = \tau_p \left(\frac{(\gamma - 1)\xi_b + 1}{\gamma} \right)^{-\frac{(\gamma+1)}{\gamma-1}} \quad (5.42)$$

dando:

$$\xi(\tau) = \phi_{oid} - (\phi_{oid} - \xi_b)\tau/\tau_b, \quad \tau_b \leq \tau \quad (5.43)$$

La posición del punto viene dada por lo tanto por:

$$r = r_p \quad \text{para} \quad 0 < \tau < \tau_p \quad (5.44)$$

$$r = r_{oi} \{1 - \tau \{ \gamma (\tau_p / \tau)^{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} - 1 \} / (\gamma - 1) \}; \quad \tau_p \leq \tau \leq \tau_b \quad (5.45)$$

$$r = r_{oi} \{1 - \tau \phi_{oi} + (\phi_{oid} - \xi_b)\tau^2 / \tau_b\}; \quad \tau_b \leq \tau \quad (5.46)$$

La posición de la onda de detonación viene dada de integrar la ecuación:

$$D = D_0 \{1 + (\phi_{1D} / \phi_{oD})^2 \tau^2 / 2\} \quad (5.47)$$

con la condición inicial $\tau=0 \Rightarrow r_D=r_{oi}$, dando:

$$r_D = r_{oi} \{1 - \tau - (\phi_{1D}/\phi_{oD})^2 \tau^2/6\} \quad (5.48)$$

En cuanto a la posición de la onda de choque débil, he mos de integrar la ecuación:

$$\frac{D_o}{r_o} \frac{dr_b}{d\tau} = B = B_o (1 - \tau B_1/B_o) \quad (5.49)$$

con la condición inicial $\tau=0 \Rightarrow r_b=r_{oi}$, quedando en variables adimensionales:

$$\xi_b = (B_o/D_o) (1 - \tau B_1/2B_o) = \xi_{ob} - \tau (B_1/D_o)/2; \quad \tau \geq 0 \quad (5.50)$$

o en variables físicas:

$$r_b = r_{oi} \{1 - \tau \xi_{ob} + \tau^2 (B_1/D_o)/2\}; \quad -0 \quad (5.51)$$

Por lo tanto, las magnitudes fluidas antes y después de ella valen:

$$\left[\phi_{or} \right]_b = \left[\phi_{or} \right]_{ob} + \frac{\partial \sqrt{\gamma f_o / \psi_o}}{\partial \xi^-} \frac{B_1}{2D_o} \quad (5.52)$$

$$\left[\psi_o \right]_b = \left[\psi_o \right]_{ob} + \left[\frac{\partial \psi_o}{\partial \xi^-} \right]_{ob} \frac{B_1}{2D_o} \quad (5.53)$$

$$\left[\phi'_1 \right]_b = \phi'_{1ob} + \left[\frac{\partial \phi'_1}{\partial \xi^-} \right]_{ob} \frac{B_1}{2D_o} \quad (5.54)$$

$$\left[\phi_1 \right]_b = \phi_{1ob} + \left[\frac{\partial \phi_1}{\partial \xi^+} \right]_{ob} \frac{B_1}{2D_o} \quad (5.55)$$

$$\left[\psi'_1 \right]_b = \psi'_{1ob} + \left[\frac{\partial \psi'_1}{\partial \xi^-} \right]_{ob} \frac{B_1}{2D_o} \quad (5.56)$$

$$\left[\psi_1 \right]_b = \psi_{1ob} + \left[\frac{\partial \psi_1}{\partial \xi^+} \right]_{ob} \frac{B_1}{2D_o} \quad (5.57)$$

Dado que el uso de esta aproximación al valor de las magnitudes fluidas antes y detrás de la onda de choque débil da lugar a no linealidades en las incógnitas A, E, F e I, se tomará el valor de las magnitudes en la posición de la onda dada por su movimiento inicial, es decir, $g=g_{ob}$; quedando (5.18):

$$\left[\psi'_1 - \psi_1 \right]_{g=g_{ob}} = \psi_{oi} \left[(\phi'_1 - \phi_1) / \phi_{or} \right]_{g=g_{ob}} \quad (5.58)$$

6.- ESTUDIO DE LA ONDA DE CHOQUE GENERADA EN EL MEDIO INERTE

Utilizaremos desarrollos de las variables adimensionales en potencias del tiempo adimensional:

$$M_{ot}/r_{oi} = -\delta\tau \ll 1 \quad (6.1)$$

$$\delta = M_o/D_o < 0 \quad \text{siempre.} \quad (6.2)$$

Por lo tanto definimos el estado del fluido tras la onda de choque por:

$$f_M = \frac{P}{\rho_{km} M^2} = f_{oM} - f_{1M} \delta\tau + \dots; \quad M = dr_M/dt \quad (6.3)$$

$$\phi_M = u/M = \phi_{oM} - \phi_{1M} \delta\tau + \dots; \quad u_M = [dr/dt]_M \quad (6.4)$$

$$\psi_M = \rho/\rho_{km} = \psi_{oM} - \psi_{1M} \delta\tau + \dots \quad (6.5)$$

La presión en la interfase y la velocidad de propagación de la onda de choque pueden escribirse como:

$$P_i = P_{oi}(1 - p_1 \delta\tau + \dots); \quad M = M_o(1 - m_1 \delta\tau + \dots) \quad (6.6)$$

P_{oi} , p_1 y m_1 quedan determinados como parte de la solución puesto que $M = \frac{dr_M}{d\tau} = -\frac{M_o}{\delta} \frac{dy}{d\tau}$; de (7.6) resulta que:

$$y = -\delta\tau + m_1(\delta\tau)^2/2 + o(\delta\tau)^3 \quad (6.7)$$

Las ecuaciones que determinan el estado del fluido detrás de una onda de choque intensa, despreciando la presión inicial frente a la del fluido detrás de la onda, son:

$$P_M = \rho_{km} u_M M \quad (6.8)$$

$$\rho_{km} M = \rho_M (M - u_M) \quad (6.9)$$

$$e_M = u_M^2/2 \quad (6.10)$$

La ecuación de estado del medio tras la onda de choque nos ha de proporcionar la función:

$$e_M = e_M(P_M, \rho_M) \quad (6.11)$$

Experimentalmente se ha comprobado que dentro de un amplio margen de presiones se cumple muy aproximadamente que:

$$M = H + G u_M \quad (6.12)$$

$H < c_{km}$ y del mismo orden.

Por ejemplo, (Zel'dovich, Ya.B. y Raizer, Yu.P.; 1967) para el hierro es:

$$H = 3.8 \times 10^5 \text{ cm/s}; \quad G = 1.58$$

$$c_{km} = 5.7 \times 10^5 \text{ cm/s}; \quad \rho_{km} = 7.8 \text{ gr/cm}^3$$

Agregando (6.12) al sistema (6.8) y (6.9) quedan determinados M , u_M , ρ_M , en función de la presión detrás de la onda,

P_M . Como consecuencia de (6.10) obtenemos la energía interna es pecífica, e_M detrás de la onda de choque, solamente para los es tados posibles detrás de ella, por lo que no generamos una ex presión del tipo (6.11).

La ecuación (6.12) es sólo formalmente válida para $M > c_{km}$ lo cual equivale a que:

$$P_M > \rho_{km} c_{km} (c_{km} - H) = P_c \quad (6.13)$$

Para los valores típicos del hierro es $P_c = 0.54 \times 10^7$ N/cm² presión bastante superior a la que se origina detrás de la detonación de un explosivo de alta energía, sin convergencia geométrica, por lo que (6.12) no resulta apropiada para describir el comportamiento del medio inerte.

Si se intenta expresar el comportamiento del fluido por medio de la ecuación de estado:

$$P/\rho^{\gamma_m} = K(s); \quad \gamma_m = \text{cte} = \gamma_0 \quad (6.14)$$

Con objeto de tener un criterio de estimación de valores de γ_0 , igualamos la velocidad de la onda de choque calculada usando (6.14) a la calculada usando (6.12), obteniéndose:

$$\gamma_0 = 2G \left(\frac{\sqrt{1 + 4GP_M / (H^2 \rho_{km})} + 1}{\sqrt{1 + 4GP_M / (H^2 \rho_{km})} - 1} \right) \quad (6.15)$$

que es función de P_M en contra de la hipótesis de que γ_0 es cons tante; no obstante, para $P_M / (c_{km}^2) \rightarrow \infty$, $\gamma_0 \rightarrow 2G - 1$; resultando γ_0 poco sensible a este parámetro para valores grandes de él frente a la unidad, como demuestra el siguiente cuadro hecho para los va-

lores tomados para el hierro:

$P_M (N/cm^2)$	∞	10^8	10^7	$0'54 \times 10^7 = P_c$
γ_o	2'2	3'4	6'2	8'5

Se ha observado que para presiones del orden de las que origina la detonación de un material explosivo, los valores a asignar a γ_o para que la velocidad de propagación de la onda de choque sea la adecuada ($M > c_{km}$) son tan elevados y tan variables con la presión tras la onda de choque, que la ecuación (6.14) no es en absoluto útil para el margen de presiones de nuestro problema. Según (Williams, E.; 1957), (Stanyukovich, K. P.; 1960) y otros, para un margen de presiones del orden de 10^5 a 10^6 N/cm², se puede usar la ecuación de estado:

$$P = T(s) \{ (\rho/\rho_{km})^n - 1 \} \quad (6.16)$$

Según (Zel'dovich, B. y Raizer, P.; 1967) n es constante, $n=4$. Según (Jaumotte, A.L.; 1971) se ha de tomar $n=5$ para metales. Además, puesto que el incremento de energía interna del fluido asociado al incremento de entropía es despreciable frente al total, puede despreciarse la dependencia de T con la entropía específica s , pudiéndose escribir:

$$c_{km}^2 = \left[\left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_{s=cte} \right]_{\rho=\rho_{km}} = Tn/\rho_{km} \quad (6.17)$$

con lo que la ecuación de estado queda:

$$P = \rho_{km} c_{km}^2 (\psi_m^n - 1)/n \quad (6.18)$$

La expresión de la energía interna específica, tras una onda de choque resulta:

$$e_M = \frac{P_M}{(n-1)\rho_M} + \frac{c_{km}^2}{n-1} \left(\frac{1}{\psi_M} - 1 \right) \quad (6.19)$$

que coincide con la correspondiente a un gas perfecto ($n=\gamma$) cuando $P_M/(\rho_{km} c_{km}^2) \rightarrow \infty$.

Introduciendo (6.19) en las ecuaciones de conservación a través de la onda de choque, (6.8) a (6.10), tras haber hecho uso de los desarrollos (6.3) a (6.5) se obtiene:

$$f_{oM} = \phi_{oM} = \left[\sqrt{1 + \frac{2(n+1)P_{oi}}{\rho_{km} c_{km}^2}} - 1 \right] / (n+1) = \frac{2}{n+1} \left[\left(\frac{M_o}{c_{km}} \right)^2 - 1 \right] \quad (6.20)$$

$$\psi_{oM} = \frac{1}{1 - \phi_{oM}}$$

$$f_{1M} = \phi_{1M} = 2m_1 \left(\frac{2}{n+1} - \phi_{oM} \right) = (1 - \phi_{oM})^2 \psi_{1M} \quad (6.22)$$

$$M_o = c_{km} \sqrt{\left[1 + \sqrt{1 + \frac{2(n+1)P_{oi}}{\rho_{km} c_{km}^2}} \right] / 2} = c_{km} \sqrt{1 + \frac{(n+1)}{2} \phi_{oM}} \quad (6.23)$$

Como caso típico, con los datos tomados para el hierro es:

$$P_o = 10^5 \text{ N/cm}^2$$

$$n=4; \phi_{oM} = 3'83 \times 10^{-3}; \psi_{oM} = 1'004; M_o = 5'73 \times 10^4 \text{ cm/s}$$

$$n=5; \phi_{oM} = 3'83 \times 10^{-3}; \psi_{oM} = 1'004; M_o = 5'73 \times 10^4 \text{ cm/s}$$

$$P_o = 10^6 \text{ N/cm}^2$$

$$n=4; \phi_{oM} = 3'53 \times 10^{-2}; \psi_{oM} = 1'037; M_o = 5'97 \times 10^3 \text{ m/s}$$

$$n=5; \phi_{oM} = 3'47 \times 10^{-2}; \psi_{oM} = 1'036; M_o = 5'96 \times 10^3 \text{ m/s}$$

No obstante emplearemos ambas ecuaciones de estado:

$$P/\rho^{\gamma_o} = K(s)$$

$$P = \rho_{km} c_{km}^2 (\psi_m^n - 1)/n$$

indistintamente para describir la evolución del fluido alcanzado por la onda de choque.

7.- CAMPO DETRAS DE LA ONDA DE CHOQUE GENERADA EN EL MEDIO INERTE

Buscamos solución a las ecuaciones como desarrollo en serie de potencias del tiempo adimensional τ , ver (6.1) y (6.2).

$$f_m(\zeta, \tau) = f_{om}(\zeta) - f_{1m}(\zeta)\delta\tau + \dots \quad (7.1)$$

$$\phi_m(\zeta, \tau) = \phi_{om}(\zeta) - \phi_{1m}(\zeta)\delta\tau + \dots \quad (7.2)$$

$$\psi_m(\zeta, \tau) = \psi_{om}(\zeta) - \psi_{1m}(\zeta)\delta\tau + \dots \quad (7.3)$$

Introducidas en las ecuaciones (1.22) a (1.25) nos dan:

A.- Primera Aproximación

Identificando los términos asociados a la potencia cero de τ , se obtienen las ecuaciones análogas a (3.4) y (3.6).

$$(\phi_{om} - \zeta) \frac{d\psi_{om}}{d\zeta} + \psi_{om} \frac{d\phi_{om}}{d\zeta} = 0 \quad (7.4)$$

$$(\phi_{om} - \zeta) \frac{d\phi_{om}}{d\zeta} + \frac{1}{\psi_{om}} \frac{df_{om}}{d\zeta} = 0 \quad (7.5)$$

$$\frac{d}{d\zeta} \left(\frac{s_{om}}{M_o^2} \right) = 0 \quad (7.6)$$

con las condiciones de contorno:

en $\zeta=1$ (onda de choque)

$$\phi_{om} = f_{om} = \phi_{oM} \quad (7.7)$$

$$\psi_{om} = 1/(1 - \phi_{oM}) \quad (7.8)$$

en $\zeta=\zeta_{oi}$ (interfase)

$$[f_{om}]_{oi} = P_{oi}/(M_o^2 \rho_{km}) \quad (7.9)$$

Esta última condición de contorno sirve para relacionar M_o , con P_{oi} al imponer las condiciones de contacto en la interfase.

Ecuación de estado..- $P/\rho^{\gamma_o} = K(s)$

La solución, obtenida por (Liñán, A. y Rodríguez, M.; 1977), es:

$$\phi_{om}(\zeta) = \phi_{oM} = 2/(\gamma_o + 1) \quad (7.10)$$

$$\psi_{om}(\zeta) = \psi_{oM} = (\gamma_o + 1)/(\gamma_o - 1) \quad (7.11)$$

$$f_{om}(\zeta) = f_{oM} = 2/(\gamma_o + 1) \quad (7.12)$$

$$M_o = \frac{P_{oi}(\gamma_o + 1)}{2\rho_{km}} \quad (7.13)$$

Ecuación de estado..- $P = \rho_{km} c_{km}^2 (\psi^n - 1)/n$

Coincide el planteamiento general salvo que la ecuación (7.6) toma la forma:

$$\frac{d}{d\zeta} \left(\frac{f_{om}}{\psi_{om}^{n-1}} \right) = 0 \quad (7.14)$$

La solución es:

$$\phi_{om}(\zeta) = \phi_{oM} = \{ \sqrt{1 + 2(n+1)P_{oi}/(\rho_{km} c_{km}^2)} - 1 \} / (n+1) \quad (7.15)$$

$$\psi_{om}(\zeta) = \psi_{oM} = 1/(1 - \phi_{oM}) \quad (7.16)$$

$$f_{om}(\zeta) = \phi_{oM} \quad (7.17)$$

B.- Segunda Aproximación

Identificando en las ecuaciones del movimiento los tér

minos asociados a la potencia unidad de τ se obtiene:

$$\text{Ecuación de estado.} - P/\rho^{\gamma_0} = K(s)$$

Las ecuaciones del movimiento quedan (Liñán, A. y Rodríguez, M.; 1977):

$$(\phi_{om} - \zeta) \frac{d\psi_{1m}}{d\zeta} + \psi_{om} \frac{d\phi_{1m}}{d\zeta} = -j\phi_{om}\psi_{om} - \psi_{1m} \quad (7.18)$$

$$(\phi_{om} - \zeta) \frac{d\phi_{1m}}{d\zeta} + \frac{1}{\psi_{om}} \frac{df_{1m}}{d\zeta} = -\phi_{1m} - m_1\phi_{om} \quad (7.19)$$

$$(\phi_{om} - \zeta) \frac{d}{d\zeta} \left(\frac{f_{1m}}{f_{om}} - \gamma_0 \frac{\psi_{1m}}{\psi_{om}} \right) = - \left(\frac{f_{1m}}{f_{om}} - \gamma_0 \frac{\psi_{1m}}{\psi_{om}} \right) - 2m_1 \quad (7.20)$$

Condiciones de contorno:

en $\zeta=1$ (onda de choque)

$$\phi_{1m} = \phi_{1M} = 0 \quad (7.21)$$

$$\psi_{1m} = \psi_{1M} = 0 \quad (7.22)$$

$$f_{1m} = f_{1M} = 0 \quad (7.23)$$

en $\zeta=\xi_{im}$ (interfase)

$$[f_{1m}]_{oi} = \phi_{om}(p_1 - 2m_1) \quad (7.24)$$

Esta última condición se usará junto con las condiciones de contacto en la interfase para completar el sistema de ecuaciones que nos darán todos los parámetros que definen la solución.

La solución es:

$$\phi_{1m}(\zeta) = \lambda(1-\zeta) \quad (7.25)$$

$$\psi_{1m}(\zeta) = \alpha(1-\zeta) \quad (7.26)$$

$$f_{1m}(\zeta) = \beta(1-\zeta) \quad (7.27)$$

$$\lambda = \frac{P_1}{\gamma_o} + \frac{2j}{\gamma_o + 1} \quad (7.28)$$

$$\alpha = \frac{P_1}{\gamma_o} \left(\frac{\gamma_o + 1}{\gamma_o - 1} \right)^2 \quad (7.29)$$

$$\beta = \frac{2(2\gamma_o - 1)}{3\gamma_o(\gamma_o - 1)} P_1 + \frac{4j}{3(\gamma_o + 1)} \quad (7.30)$$

$$m_1 = \frac{(\gamma_o + 1)}{6\gamma_o} P_1 - \frac{(\gamma_o - 1)j}{3(\gamma_o + 1)}, \quad [\text{equivalente a (7.24)}] \quad (7.31)$$

Ecuación de estado..- $P = \rho_{km} c_{km}^2 (\psi^n - 1)/n$

Las ecuaciones del movimiento resultan idénticas que para el caso anterior, salvo que ha de hacerse:

$$\gamma_o = n/(\psi_{oM}^n - 1) = \rho_{km} c_{km} / P_{oi} = \frac{1}{\phi_{oM}} - \frac{n+1}{2} \quad (7.32)$$

Las condiciones de contorno también coinciden, salvo que en (7.21) ha de hacerse:

$$\phi_{1M} = 2m_1 \left(\frac{2}{n+1} - \phi_{oM} \right) = 4m_1 \phi_{oM} \gamma_o / (n+1) \quad (7.33)$$

Por lo tanto, la solución es:

$$\phi_{1m} = \phi_{1M} + \lambda(1 - \zeta) \quad (7.34)$$

$$\psi_{1m} = \psi_{1M} + \alpha(1 - \zeta); \quad \psi_{1M} = \phi_{1M} (1 - \phi_{oM})^{-2} \quad (7.35)$$

$$f_{1m} = f_{1M} + \beta(1 - \zeta); \quad f_{1M} = \phi_{1M} \quad (7.36)$$

$$\alpha = \frac{P_1}{\gamma_o (1 - \phi_{oM})^2} - \frac{4m_1 \gamma_o \phi_{oM}}{(n+1)(1 - \phi_{oM})^3} \quad (7.37)$$

$$\beta = \frac{\{2 + (\gamma_o - 2)\phi_{oM}\}P_1}{3(1 - \phi_{oM})\gamma_o} + \frac{4m_1 \gamma_o \phi_{oM}}{3(n+1)(1 - \phi_{oM})} + 2j\phi_{oM}/3 \quad (7.38)$$

$$m_1 = - \left[\left(\frac{n-1}{2} \right) \phi_{oM} P_1 + j(1 - \phi_{oM}) \left[1 - \left(\frac{n+1}{2} \right) \phi_{oM} \right] \right] / \left[\gamma_o \phi_{oM} \left(3 + \frac{8\gamma_o}{n+1} \right) \right] \quad (7.39)$$

$$\lambda = \frac{P_1}{\gamma_o} + j\phi_{oM}$$

C.- Trayectorias

Una partícula situada en $r=r_p$, es alcanzada cuando:

$$y_p = -\delta\tau_p = (r_p - r_{oi})/r_{oi} \quad (7.40)$$

a partir de ese instante la ecuación de su movimiento es:

$$d\{y\zeta(y)\} = \phi\{\zeta(y), y\}dy, \quad y \geq y_p \quad (7.41)$$

diferenciando se obtiene:

$$\frac{d\zeta(y)}{\phi\{\zeta(y), y\} - \zeta(y)} = \frac{dy}{y}; \quad y \geq y_p \quad (7.42)$$

Hemos de quedarnos con la aproximación $\phi\{\zeta(y), y\} = \phi_{oM}$ para poder integrar esta ecuación con la condición inicial:

$$y = y_p; \quad \zeta = 1 \quad (7.43)$$

y se obtiene:

$$\zeta(y) = \phi_{oM} + \frac{y_p}{y} (1 - \phi_{oM}) \quad (7.44)$$

Para conocer la posición de la interfase, se integra con la condición inicial:

$$y = 0; \quad \zeta = 1 \quad (7.45)$$

y haciendo $\phi_i\{\zeta(y), y\} = \phi_{oM} + y[\phi_{1M} + \lambda\{1 - \zeta_i(y)\}]$ para la interfase, se obtiene:

$$\zeta_i = \phi_{oM} - \delta\tau\{\phi_{1M} + \lambda(1 - \phi_{oM})\}/2 \quad (7.46)$$

Por lo tanto, la posición real de un punto genérico viene dada por:

$$r = r_p; \quad 0 \leq \tau < \tau_p \quad (7.47)$$

$$r = r_{oi} \{1 - \delta\tau_p (1 - \phi_{oM}) - \delta\tau \phi_{oM}\}, \quad \tau_p \leq \tau \quad (7.48)$$

Para la interfase:

$$r_i = r_{oi} [1 - \phi_{oM} \delta\tau + \{\phi_{1M} + \lambda(1 - \phi_{oM}) + \phi_{oM} m_1 / 2\} (\delta\tau)^2 / 2] \quad (7.49)$$

Análogamente, la posición de la onda de choque viene por:

$$r_M = r_{oi} \{1 + (M_o t / r_{oi}) + m_1 (M_o t / r_{oi})^2 / 2\} \quad (7.50)$$

8.- CONDICIONES DE CONTACTO EN LA INTERFASE

Hemos de relacionar previamente las variables de posición, adimensionalizadas de distinta forma. De (1.8), (1.9), (1.10) y (1.11) podemos deducir que:

$$\xi / \zeta = y / x = \delta(1 - m_1 \delta\tau / 2) \quad (8.1)$$

En la interfase habrá discontinuidad en la densidad y temperatura del fluido, así como en todas las derivadas, mientras que la presión y velocidad han de ser continuas a través de ella.

Igualdad de velocidad

$$\left[u(\xi, \tau) \right]_{\xi=\xi_i} = \left[u(\zeta, \tau) \right]_{\zeta=\zeta_i} \quad (8.2)$$

Expresando esta ecuación en variables adimensionales, en desarrollo hasta el segundo término en potencias de τ e identificando los términos de orden unidad y de orden τ separadamente, se obtiene:

$$\phi_{oid} = \delta\phi_{oM} \quad (8.3)$$

$$\delta^2 \left[m_1 \phi_{OM} + \phi_{1m} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\partial \phi_{OM}}{\partial \zeta} \right) \right]_{\zeta = \phi_{OM}} = \left[\phi'_{1d} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\partial \phi_{od}}{\partial \xi} \right) \right]_{\xi = \phi_{oid}} \quad (8.4)$$

Igualdad de presión

$$\left[P(\xi, \tau) \right]_{\xi = \xi_i} = \left[P(\zeta, \tau) \right]_{\zeta = \zeta_i} \quad (8.5)$$

Expresando esta igualdad en desarrollo de potencias de τ , para los términos asociados a las potencias cero y uno de τ se obtiene:

$$Q = \rho_{kd} / \rho_{km} \quad (8.6)$$

$$Q f_{oid} = \phi_{OM} \delta^2 \quad (8.7)$$

$$Q \left[f'_{1d} + \frac{1}{2} \frac{\partial f_{od}}{\partial \xi} \phi'_{1d} \right]_{\xi = \phi_{oid}} = \delta^3 \phi_{OM} P_1 \quad (8.8)$$

9.- ECUACIONES FINALES DE ACOUPLE PARA LA PRIMERA APROXIMACION

Las ecuaciones (8.3) y (8.7) nos permiten calcular ϕ_{oid} y ϕ_{OM} , que fueron dejadas como incógnitas al describir el campo fluido.

Ecuación de estado. - $P/\rho^{\gamma_o} = K(s)$

$$\eta \left[1 + (\gamma_d - 1) \phi_{oid} \right]^{\frac{\gamma_d}{\gamma_d - 1}} = - \phi_{oid} , \quad \phi_{OM} = \frac{2}{\gamma_o + 1} \quad (9.1)$$

$$\delta = \phi_{oid} (\gamma_o + 1) / 2 = M_o / D_o < 0 \quad (9.2)$$

$$\eta = \frac{2Q}{(\gamma_o + 1)(\gamma_d + 1)} \left(\frac{\gamma_d + 1}{2\gamma_d} \right)^{\frac{\gamma_d}{\gamma_d - 1}} \quad (9.3)$$

Para detonantes mucho menos densos que el material re.

flector es $\eta \ll 1$, por lo que de (9.1) es $\phi_{oid} \sim \eta$, tomando los primeros términos de desarrollar (9.1) en serie de potencias de ϕ_{oid} , podemos despejar ϕ_{oid} resultando:

$$\phi_{oid} = -\eta + \gamma_d \eta^2 - \gamma_d(\gamma_d + 1/2)\eta^3 + \gamma_d(3\gamma_d^2 + 4\gamma_d + 1)\eta^4/3 + O(\eta^5) \quad (9.4)$$

Son necesarios bastantes términos debido a que los coeficientes de η^n crecen como γ_d^{n-1} .

Como ejemplo, para $\eta=0.1$, $\gamma_d=3$ es $\phi_{oid}=-0.077638$ (exacto) y $\phi_{oid}=-0.0765$ (aproximando hasta términos de orden η^4) con lo que el error cometido es del 1.5%.

El único caso en el que está justificado el uso de esta ecuación de estado, es en el que el reflector está constituido por un material gaseoso en su estado inicial sin perturbar. El valor de η puede entonces del orden, e incluso mucho mayor, que la unidad. Para este último caso, podemos obtener una expresión aproximada para ϕ_{oid} :

$$\phi_{oid} = -\frac{1}{\gamma_d - 1} \left[1 - \{(\gamma_d - 1)\eta\}^{(1-\gamma_d)/\gamma_d} + (\gamma_d - 1)^{(2-\gamma_d)/\gamma_d} \eta^{2(1-\gamma_d)/\gamma_d} / \gamma_d \right] \quad (9.5)$$

Por ejemplo para $\eta=10$ y $\gamma_d=3$, de esta fórmula es: $\phi_{oid}=-0.4383$, mientras que el valor exacto es: $\phi_{oid}=-0.43787$, con lo que el error cometido es del 0.1%.

En la tabla (9.1) se dan valores de ϕ_{oid} para $\gamma_d=3$ y valores de η para los que ambas aproximaciones fallan. En la figura (9.1) se representan estos valores.

La determinación de M_o usando (9.2) y de P_{oi} usando (7.13) es ya inmediata.

Ecuación de estado. - $P = \rho_{km} c_{km}^2 (\psi^n - 1)/n$

Las ecuaciones (8.3) y (8.7) quedan:

$$\phi_{oM} \left\{ 1 + \left(\frac{n+1}{2} \right) \phi_{oM} \right\} = \mu \left\{ 1 + (\gamma_d - 1) \phi_{oid} \right\}^{2\gamma_d / (\gamma_d - 1)} \quad (9.6)$$

$$\phi_{oid} = \delta \phi_{oM} = -\phi_{oM} C \sqrt{1 + (n+1) \phi_{oM} / 2}; \quad C = |c_{km} / D_o| \quad (9.7)$$

$$\mu = \frac{Q}{C^2 (\gamma_d + 1)} \left(\frac{\gamma_d + 1}{2\gamma_d} \right)^{2\gamma_d / (\gamma_d - 1)}; \quad \delta = \phi_{oid} / \phi_{oM} \quad (9.8)$$

Para el margen de presiones en que la ecuación de estado es válida ha de ser $\phi_{oM} \ll 1$, por lo que de (9.6) deducimos que ha de ser $\mu \ll 1$. Esta circunstancia nos permite obtener de (9.6) y (9.7) una expresión explícita aproximada para ϕ_{oM} :

$$\phi_{oM} = \mu - \left(\frac{n+1}{2} + 2\gamma_d C \right) \mu^2 + \left[2 \left(\frac{n+1}{2} \right)^2 + \gamma_d C \left\{ 5 \left(\frac{n+1}{2} \right) + 5\gamma_d C + C \right\} \right] \mu^3 - a \mu^4 \quad (9.9)$$

$$a = 14\gamma_d^3 C^3 + 5 \left(\frac{n+1}{2} \right)^3 + \frac{63}{4} \gamma_d C \left(\frac{n+1}{2} \right)^2 + 21\gamma_d^2 C^2 \left(\frac{n+1}{2} \right) + \\ + \frac{20}{3} \gamma_d^2 C^3 + 3\gamma_d C^2 \left(\frac{n+1}{2} \right) + \frac{2}{3} \gamma_d C^3$$

Esta aproximación deja de ser buena para valores de μ aún relativamente pequeños frente a la unidad debido a que los coeficientes de μ tienen valores altos. Como ejemplo damos la tabla (9.2) de valores de ϕ_{oM} .

10.- ECUACIONES FINALES DE ACOUPLE PARA LA SEGUNDA APROXIMACION

Las ecuaciones de las condiciones de contacto (8.4) y (8.8) junto con (5.34), (5.35), (5.58) y (7.24), y con la relación $\phi_{1M} = \psi_{m1}$ dada por (7.21) ó (7.33), según la ecuación de es-

η	ϕ_{oid}	η	ϕ_{oid}
50	-0'47749	0'5	-0'21508
25	-0'46490	0'4	-0'19272
10	-0'43788	0'3	-0'16473
5	-0'40621	0'2	-0'12823
4	-0'39346	0'1	-0'077637
3	-0'37500	0'09	-0'071422
2	-0'34505	0'08	-0'064933
1	-0'28398	0'07	-0'058151
0'9	-0'27382	0'06	-0'051050
0'8	-0'26227	0'05	-0'043604
0'7	-0'24899	0'04	-0'035784
0'6	-0'23349	0'03	-0'027554

Tabla 9.1.- Valores de ϕ_{oid} en función de η con $\gamma_d=3$.

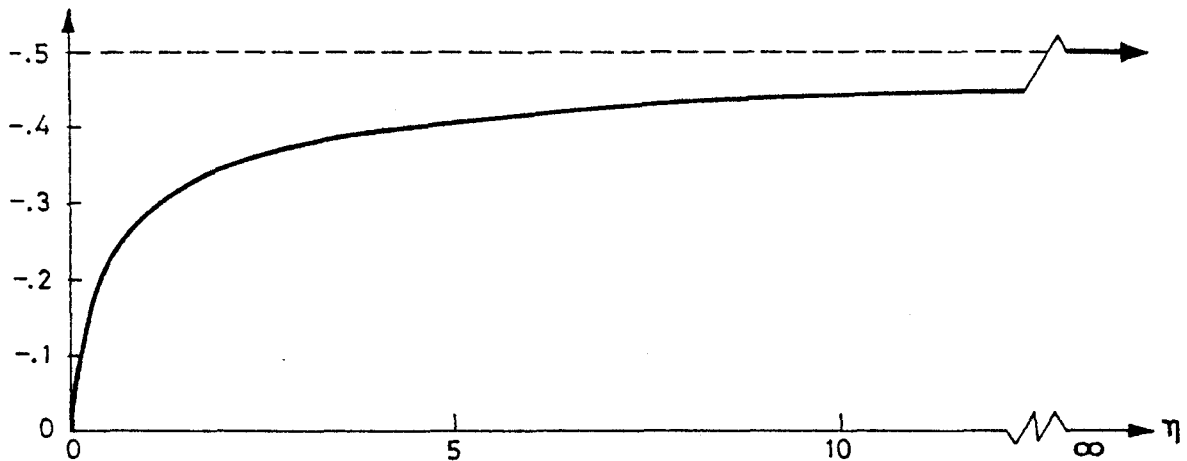


Figura 9.1.- Valores de ϕ_{oid} en función de η con $\gamma_d=3$.

$\gamma_d=3$	$c=0'5$	$c=0'7125$
Aproximación con términos hasta de orden de:	$n=5$ $\mu=0'1$	$n=4$ $\mu=3'64785 \times 10^{-3}$
μ	0'1	$3'64785 \times 10^{-3}$
μ^2	0'04	$3'55770 \times 10^{-3}$
μ^3	0'0925	$3'56078 \times 10^{-3}$
μ^4	0'03739	$3'56066 \times 10^{-3}$
Valor exacto de ϕ_{OM} :	0'0664628	$3'56066 \times 10^{-3}$

Tabla 9.2.- Valores de ϕ_{OM} en función de μ .

tado utilizada, nos proporciona un sistema de ecuaciones algébricas y lineales válido para ambas ecuaciones de estado, que nos permite obtener las incógnitas A, E, F, I, p_1 y m_1 . Abreviadamente lo podemos escribir como:

$$[L]\{R\} = \{S\} \quad (10.1)$$

en donde $\{R\}$ es la matriz columna de las incógnitas:

$$\{R\} = \begin{bmatrix} A \\ E \\ F \\ I \\ p_1 \\ m_1 \end{bmatrix} \quad (10.2)$$

$\{S\}$ es la matriz columna de los términos independientes:

$$\{S\} = \begin{bmatrix} -\psi_{1d}|_{g=g_{oa}} + V\phi_{1d}|_{g=g_{oa}} \\ -j\phi_{oid}\psi_{oid}\gamma_d/(\gamma_d-1) \\ 0 \\ -j\phi_{oM}(1-\phi_{oM})(\phi_{oid}/\phi_{oM})^2 \\ 0 \\ -j\phi_{oM}(1-\phi_{oM}) \end{bmatrix} \quad (10.3)$$

$[L]$ es la matriz de los coeficientes de las incógnitas, cuyo elemento denominado L_{ij} , ocupa la fila i y la columna j . Los que son distintos de cero son:

$$\begin{array}{ll}
 L_{11} = -g_{oa} & L_{43} = -g_{oi} \\
 L_{12} = -(\gamma_d - 1)/\gamma_d & L_{44} = L_{12} \\
 L_{13} = v g_{oa} & L_{45} = (1 - \phi_{oM})(\phi_{oid}/\phi_{oM})^2/\gamma_o \\
 L_{14} = v(\gamma_d - 1)/\gamma_d & L_{46} = (\phi_{oM} + 1)(\phi_{oid}/\phi_{oM})^2 \\
 L_{21} = (\gamma_d - 1)^{-1} + \phi_{oid} & L_{51} = \gamma_d g_{oi} \\
 L_{22} = 1 & L_{52} = (\gamma_d - 1) \\
 L_{23} = \psi_{oid} & L_{55} = -\left(\frac{\phi_{oid}}{\phi_{oM}}\right)^3 \frac{\phi_{oM} \psi_{oid}}{Q \rho_{oid}} \\
 L_{31} = \gamma_d^f \phi_{oid} / \psi_{oid}^2 & L_{65} = \{1 - (\gamma_o + 1)\}/\gamma_o \\
 L_{33} = L_{21} & L_{66} = 3\phi_{oM} + 2 \\
 L_{34} = 1 &
 \end{array}
 \quad (10.4)$$

siendo:

$$v = \left(\frac{\gamma_d + 1}{\gamma_d}\right)^2 g_{oa}^{\frac{3 - \gamma_d}{\gamma_d - 1}} \quad (10.5)$$

Ecuación de estado. - $P/\rho^{\gamma_o} = K(s)$

$$\phi = 0 ; \quad \gamma_o \text{ es un dato} \quad (10.6)$$

Ecuación de estado. - $P = \rho_{km} c_{km}^2 (\psi^n - 1)/n$

$$\phi = 2\left(\frac{2}{n+1} - \phi_{oM}\right); \quad \gamma_o = \frac{1}{\phi_{oM}} - \frac{n+1}{2} \quad (10.7)$$

11.- CONCLUSIONES Y RESOLUCION DE LAS ECUACIONES PARA ALGUNOS CASOS TIPICOS

El obtener la solución del problema para la primera aproximación ha quedado de una forma explícita, mientras que para la segunda ha quedado reducido a la resolución de un sistema

de ecuaciones algébricas lineales.

Se han resuelto estas ecuaciones para varios casos en los que la ecuación de estado $P = \rho_{km} c_{km}^2 (\psi^n - 1)/n$ puede considerarse válida y para $\gamma_d = 3$, $j = 1$ y $n = 4$.

Los resultados están en la Tabla 11.1. En las figuras 11.1, 11.2 y 11.3 se han representado p_1 , m_1 y B_1/D_0 para varios valores de Q y C . Se observa que en todos los casos la presión en la interfase cae con el tiempo, y las ondas de choque intensa y débil se deceleran.

En cuanto a la intensidad de la onda de choque débil en el medio detonado, que podemos medirla con el parámetro $[(\psi'_1 - \psi_1)/\psi_0]_D$, en la Tabla 11.1 podemos ver que crece al crecer Q y decrece al crecer C , tal y como también lo hacen la pendiente de caída de la presión en la interfase y las deceleraciones de la onda de choque intensa en el medio inerte y la débil en el medio detonado.

De la figura 11.1 podemos ver que para el margen de validez de la ecuación de estado, p_1 es o mucho menor que la unidad o a lo sumo comparable con ella. Por lo tanto, de (7.39) podemos despreciar $(\phi_{OM} p_1)$ frente a j . Por ello podemos admitir que la influencia de la caída de presión en la interfase en la aceleración de la onda de choque intensa es despreciable frente a la convergencia geométrica. Por lo tanto ponemos que:

$$m_1 = -j(n+1)\phi_{OM}(1-\phi_{OM})/\{8-(n+1)\phi_{OM}\} + O(\phi_{OM}^2) \quad (11.1)$$

Análogamente resulta:

$$\alpha = -\frac{j\phi_{OM}}{2\{1-(n+1)\phi_{OM}/8\}(1-\phi_{OM})^2} + O(\phi_{OM}^2) \quad (11.2)$$

Q	C	ϕ_{OM} $\cdot 10^3$	$-\phi_{oid}$ $\cdot 10^3$	-A $\cdot 10^4$	E $\cdot 10^2$	-F $\cdot 10^2$	I $\cdot 10^2$	-P ₁ $\cdot 10$	$-m_1$ $\cdot 10^3$	B ₁ /D ₀ $\cdot 10^2$	$[\psi_1 - \psi'_1]_b$ $\cdot 10^2 / \psi_{oid}$
0'05	0'4	20'87	8'564	14'24	7'492	7'211	3'583	4'144	12'76	4'022	7'327
0'10	0'4	37'89	15'88	9'341	8'091	6'969	3'399	4'526	22'65	4'330	7'359
0'15	0'4	50'54	21'45	1'545	8'339	6'671	3'151	4'983	29'56	4'559	7'613
0'05	0'6	96'93	5'886	42'74	7'532	7'452	3'801	2'745	6'011	3'906	7'316
0'10	0'6	18'35	11'26	73'00	8'307	7'461	3'847	2'986	11'29	4'137	7'339
0'15	0'6	26'11	16'17	92'84	8'926	7'429	3'847	3'200	15'93	4'343	7'359
0'20	0'6	32'95	20'57	102'8	9'396	7'360	3'806	3'405	19'95	4'523	7'378
0'05	0'8	5'556	4'475	56'91	7'545	7'574	3'912	2'047	3'459	3'844	7'311
0'10	0'8	10'69	8'669	104'4	8'387	7'714	4'079	2'225	6'632	4'026	7'328
0'15	0'8	15'47	12'61	143'8	9'115	7'820	4'206	2'385	9'554	4'194	7'344
0'20	0'8	19'90	16'31	176'2	9'744	7'894	4'298	2'531	12'24	4'349	7'360
0'05	1'0	3'592	3'608	65'38	7'552	7'649	3'979	1'631	2'240	3'806	7'307
0'10	1'0	6'977	7'040	123'2	8'429	7'869	4'221	1'770	4'341	3'956	7'321
0'15	1'0	10'18	10'31	174'4	9'216	8'059	4'427	1'898	6'317	4'096	7'335
0'20	1'0	13'21	13'42	219'7	9'923	8'222	4'602	2'016	8'178	4'228	7'347
0'25	1'0	16'07	16'39	259'6	10'56	8'361	4'750	2'127	9'930	4'352	7'358

Tabla 11.1.- Parámetros fundamentales del campo fluido para $j=1$, $\gamma_d=3$ y $n=4$.

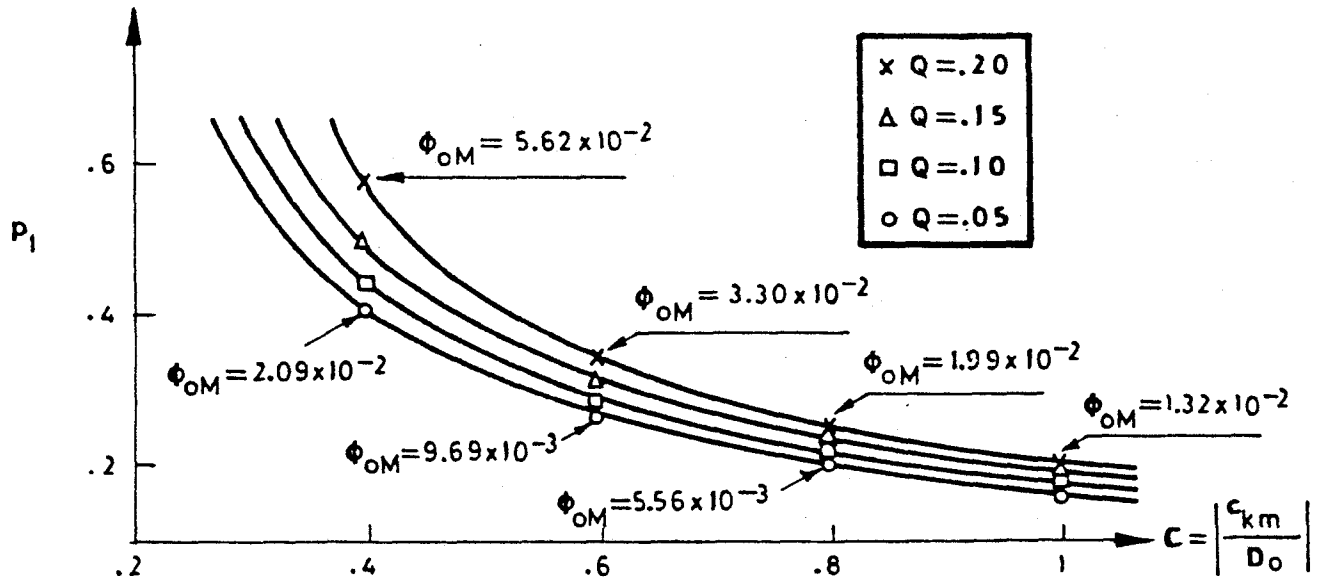


Fig 11.1.- Término de caída de presión en la interfase como función de C y Q.

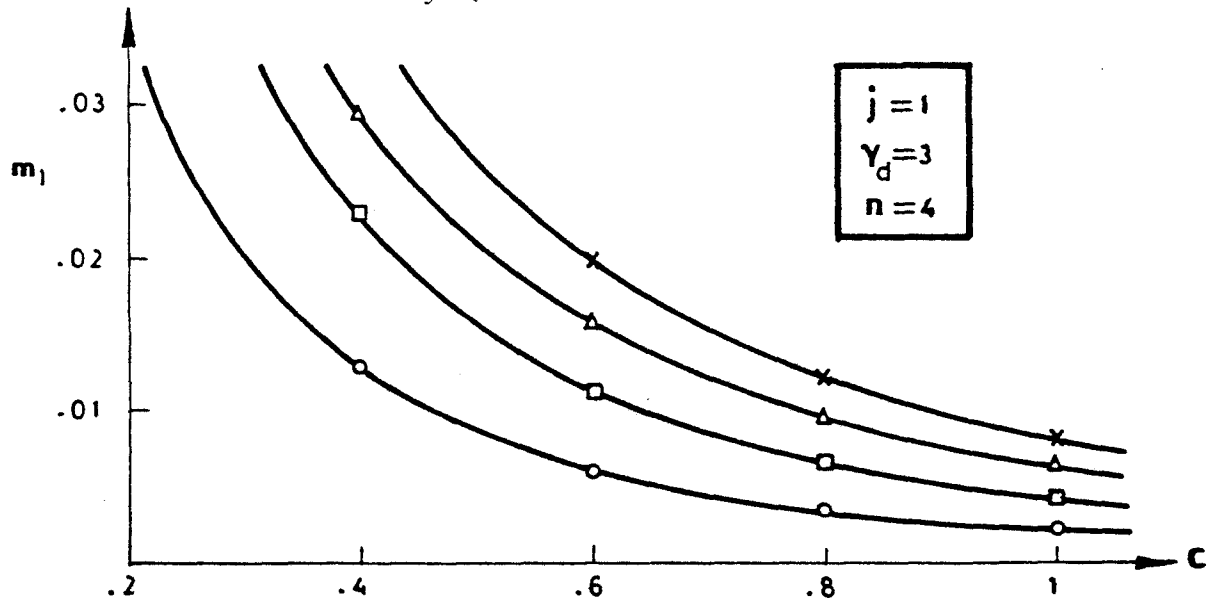


Fig 11.2.- Término de aceleración de la onda de choque fuerte.

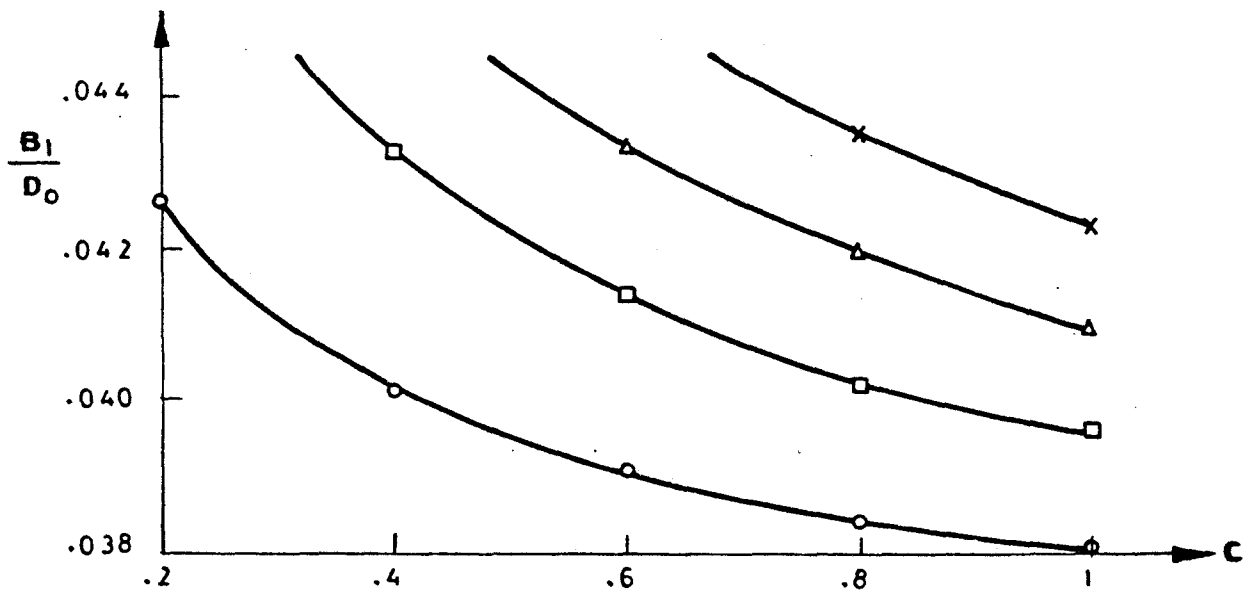


Fig 11.3.- Término de aceleración de la onda de choque débil.

$$\beta = \frac{j\phi_{om}\{3-(n+1)\phi_{om}/2\}}{6\{1-(n+1)\phi_{om}/8\}} + O(\phi_{om}^2) \quad (11.3)$$

Sin embargo en la expresión de λ hemos de retener p_1 :

$$\lambda = \phi_{om}\{j+p_1/(1 - \frac{n+1}{2} \phi_{om})\} \quad (11.4)$$

Se ha calculado todo el campo fluido para el caso siguiente:

$$Q=0'10; C=1'0; \gamma_d=3; n=4; j=1 \quad (11.5)$$

Para $j=2$, basta con multiplicar por dicho número los términos que multiplican a τ .

En las figuras (11.4), (11.5) y (11.6) se ha dibujado la velocidad, densidad y presión adimensionales para $\tau=1$. Como es obvio, la solución es sólo válida para $\tau \ll 1$, pero entonces sería muy dificultosa una representación gráfica clara.

Se han usado variables del campo fluido detonado para adimensionalizar, utilizando las relaciones:

$$\phi = \phi_d = \phi_m M/D = (\phi_{om} - \delta\tau\phi_{1m})(1-m_1\delta\tau)M_o/D_o \quad (11.6)$$

$$\psi = \psi_d = \psi_m \rho_{km}/\rho_{kd} = (\psi_{om} - \delta\tau\psi_{1m})/Q \quad (11.7)$$

$$f = f_d = f_m \frac{\rho_{km}}{\rho_{kd}} \left(\frac{M}{D}\right)^2 = (f_{om} - \delta\tau f_{1m}) \left(\frac{M_o}{D_o}\right)^2 \frac{(1-m_1\delta\tau)^2}{Q} \quad (11.8)$$

$$\xi = \zeta\delta(1-m_1\delta\tau/2) \quad (11.9)$$

La onda de choque débil no aparece "débil" en las figuras, habida cuenta de la falta de validez de la solución para $\tau=1$.

Fig 11.4.- Velocidad adimensional para todo el campo fluido.

PRIMERA APROXIMACION - - - -
SEGUNDA APROXIMACION ————

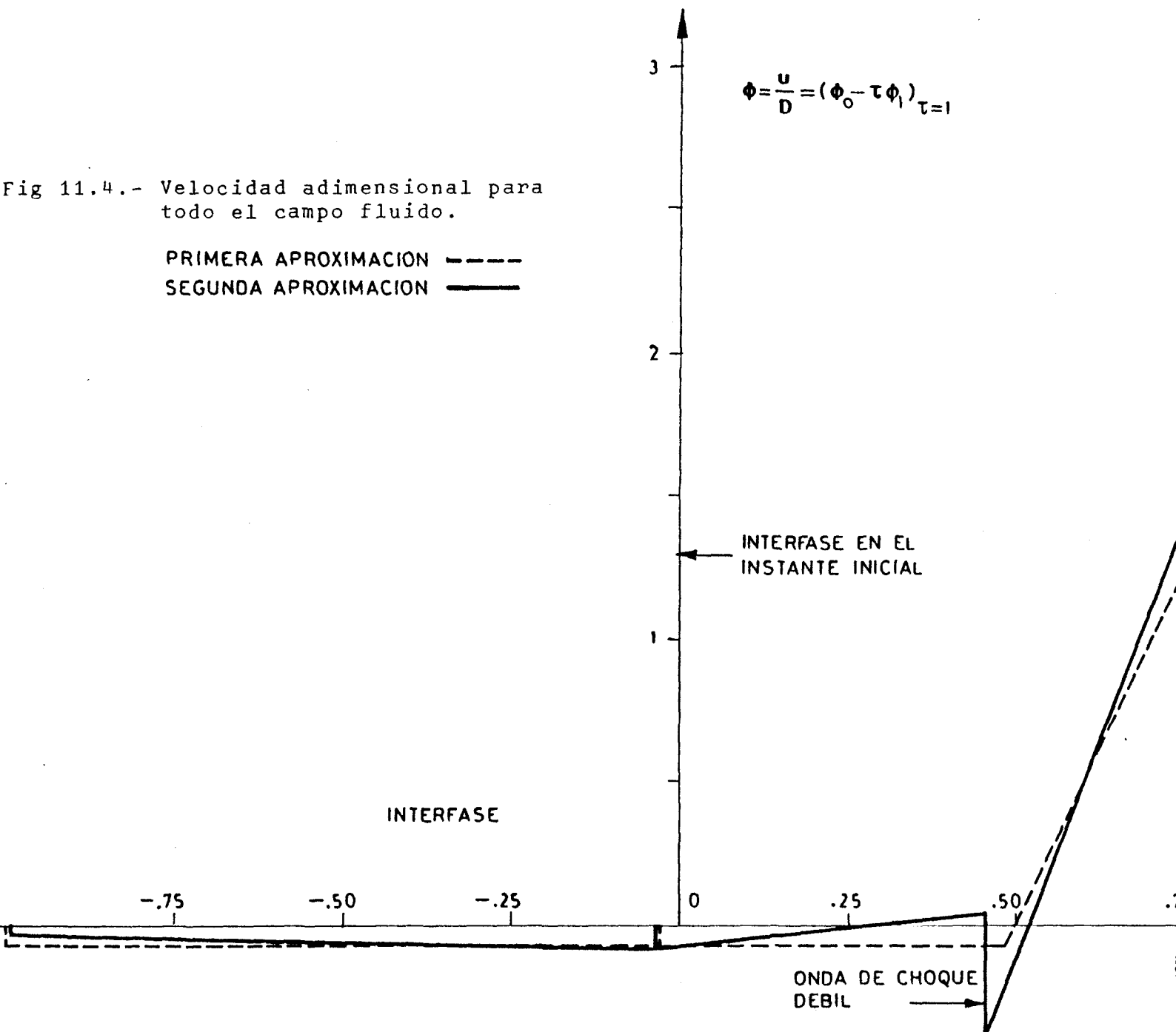
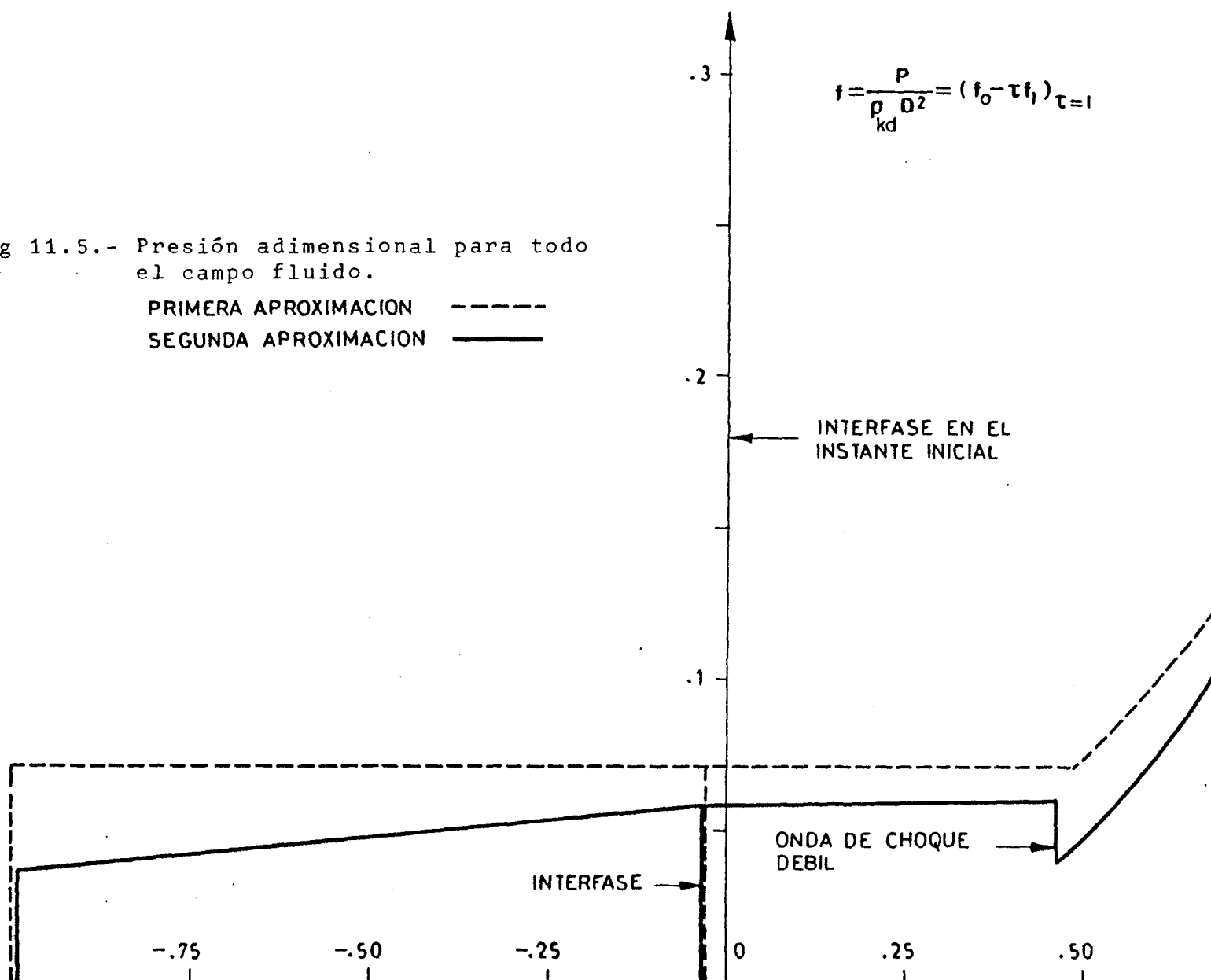


Fig 11.5.- Presión adimensional para todo el campo fluido.

PRIMERA APROXIMACION -----
SEGUNDA APROXIMACION —————



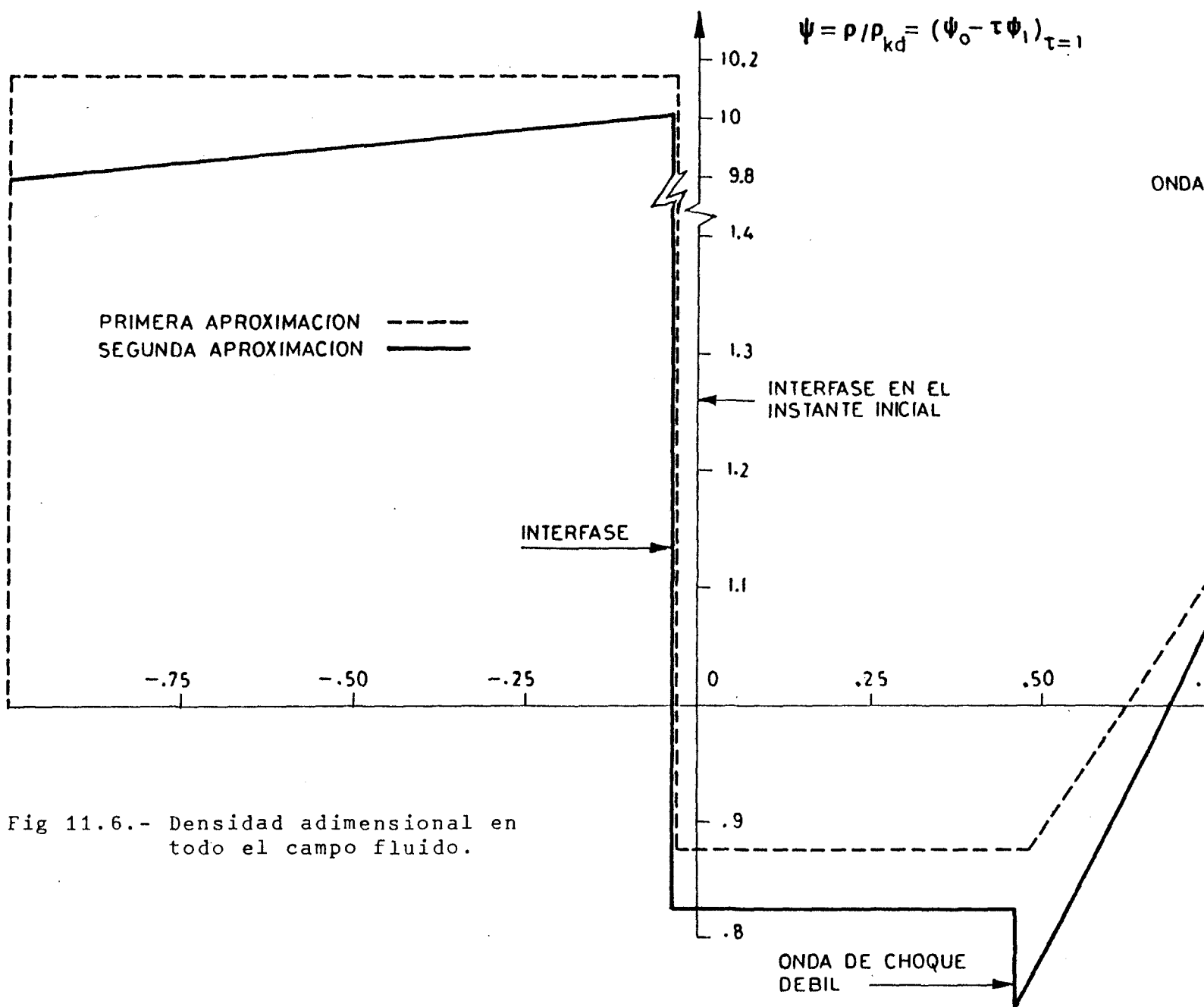


Fig 11.6.- Densidad adimensional en todo el campo fluido.

REFERENCIAS

- COURANT, R. y FRIEDRICHS, K.O.; "Supersonic Flow and Shock Waves", (Cap. III-C,E; VI), Ed. Interscience Pub., Inc., New York, (1948).
- JAUMOTTE, A.L.; "Chocs et Ondes de Choc", (Cap. IV,VI), Ed. Masson et Cie., Paris, (1971).
- KOROBENINIKOV, V.P.; "Annual Review of Fluid Mechanics", Ed. Idem Inc., (1971), Vol. 3, 317.
- LANDAU, L.D. y LIFSHITZ, E.M.; "Fluid Mechanics", (Cap. XIV), Ed. Pergamon, London, (1959), Vol. 2.
- LIÑAN, A. y RODRIGUEZ, M.; "Implosiones en medios condensados inertes y detonantes", (Cap. B), Ed. J.E.N., Madrid, (1971).
- STANYUKOVICH, K.P.; "Unsteady Motion of Continuous Media", (Cap. I,XI), Ed. Pergamon, (1960).
- WITHAM, G.B.; "Linear and Non-Linear Waves", Ed. John Wiley & Sons, New York, (1974), 37.
- ZEL'DOVICH, Ya.B. y RAIZER, Yu.P.; "Physics of Shock Waves and High-Temperature Hydrodynamics Phenomena", (Cap. VII-1, XI-2), Ed. Academic Press, New York, (1967), Vol. 2.